Optimización de los Portafolios de las AFAP con Inversión en el Exterior

Abstract

El objetivo de este trabajo es demostrar, a través de la aplicación de las teorías del portafolio, que la inversión en el exterior habría permitido a las AFAP mejorar la gestión de sus portafolios. Dado que los retornos de los instrumentos extranjeros no están perfectamente correlacionados con los de los instrumentos locales, la posibilidad de inversión en el exterior habría permitido diversificar el riesgo "Uruguay" mejorando la eficiencia de los portafolios en el plano riesgo – retorno.

El trabajo es una aplicación del análisis media-varianza y de teorías más modernas de administración del riesgo (optimización del CVaR) para estimar la participación óptima de la inversión extranjera (acciones y bonos) en el portafolio de los fondos de ahorro previsional de Uruguay. Se computan por un lado los portafolios que minimizan la varianza y por el otro los que minimizan el CVaR para una serie de retornos requeridos.

Marcos Rivero
María Valdés

Diciembre 2003

INDICE

Optimización de los Portafolios de las AFAP con Inversión en el Exterior

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es demostrar, a través de la aplicación de las teorías del portafolio, que la inversión en el exterior habría permitido a las AFAP mejorar la gestión de sus portafolios. Dado que los retornos de los instrumentos extranjeros no están perfectamente correlacionados con los de los instrumentos locales, la posibilidad de inversión en el exterior habría permitido diversificar el riesgo "Uruguay" mejorando la eficiencia de los portafolios en el plano riesgo – retorno.

Este trabajo es una extensión del de Siandra y Testuri (2001)[1] que busca determinar cual es la participación óptima de los instrumentos extranjeros de renta variable (acciones) en los portafolios de los fondos de ahorro previsional de Uruguay.

Se realiza una aplicación del análisis media-varianza y de teorías más modernas de administración del riesgo (optimización del CVaR) para estimar la participación óptima de la inversión extranjera (acciones y bonos) en el portafolio de los fondos de ahorro previsional de Uruguay. Se computan por un lado los portafolios que minimizan la varianza y por el otro los que minimizan el CVaR para una serie de retornos requeridos.

El desarrollo del trabajo es el siguiente: en primer lugar se presenta formalmente las teorías del portafolio. Segundo, se aplica para el caso de los Fondos de Ahorro Previsional de Uruguay la optimización de los portafolios bajo las dos versiones de las teorías del portafolio presentadas. Luego, se analizan los resultados y por último se presentan las conclusiones.

[1] Siandra, Eduardo y Testuri, Carlos, "Foreign Equity Investment in Uruguayan Pension Funds", Julio 2001.

2. Teorías del Portafolio tradicionales y modernas

2.1. Enfoque tradicional de Media-Varianza (Markowitz)

El modelo media-varianza para la selección de activos ha sido ampliamente usado en finanzas desde que el trabajo elaborado por Markowitz (1952) sentó las bases de la administración de inversiones estableciendo la formulación eficiente de portafolios de mínima varianza. Esta formulación, que establece un "trade off" entre la tasa de retorno esperado y la varianza del retorno de un portafolio, puede ser resuelta numéricamente mediante la programación cuadrática.

Se supone que existen N activos riesgosos que se transan en una economía libre de fricciones, cuyas tasas de retorno tienen varianza finita y distintos valores esperados. Para el caso que nos interesa, se imponen restricciones a la venta corta, es decir, ningún elemento del vector de ponderadores ***w*** toma valores negativos. También se supone que los retornos de los activos son linealmente independientes y por lo tanto la matriz de covarianzas, ***V***, es no singular. La matriz de covarianzas es además simétrica dado que Cov(r_j, r_i) = Cov(r_i, r_j) para todo i, j. Dicha matriz simétrica es positiva definida si para cualquier vector arbitrario de N constantes ***w***, con al menos un elemento de ***w*** distinto de cero, $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}>0$. Por lo tanto, **V** es una matriz definida positiva dado que $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{w}$ es la varianza de un portafolio y las varianzas de portafolios riesgosos son estrictamente positivas.

Se define *"portafolio fronterizo"* como aquel que tiene la mínima varianza entre los portafolios con un mismo retorno esperado. Un portafolio ***P*** es un portafolio fronterizo si y solo si $\boldsymbol{w}_p$, el vector de N ponderadores del portafolio ***P***, es la solución al siguiente programa cuadrático:

$$
\begin{aligned}
&\min_{w} w^T V w \\
&\underline{s.a} \\
&w^T e \geq E\left[r_p\right] \\
&\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
&w_i \geq 0, i = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

donde ***e*** denota el vector de N retornos esperados de los N activos riesgosos, y $E(r_p)$ es el retorno esperado del portafolio ***P***.

El programa cuadrático anterior minimiza la varianza del portafolio sujeto a las siguientes restricciones: (i) el retorno del portafolio es mayor o igual a $E(r_p)$, (ii) la suma de ponderadores es igual a uno y (iii) los ponderadores son no negativos (restricción a la venta corta).

Dado que ***V*** es una matriz positiva definida y que las restricciones definen un conjunto convexo, las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para la existencia de un óptimo global.

El conjunto de todos los portafolios fronterizos conforma una *"frontera"* en el plano media-varianza. Aquellos portafolios pertenecientes a la frontera con retornos esperados estrictamente superiores al del portafolio de mínima varianza se llaman *"portafolios eficientes"*. Los portafolios que pertenecen a la frontera pero cuyos retornos son inferiores al del portafolio de mínima varianza son *"portafolios* *ineficientes"*. Para cada portafolio ineficiente, existe uno eficiente que tiene la misma varianza pero un retorno esperado mayor.

Existen dos motivaciones técnicas que justifican el análisis media-varianza : (i) funciones de utilidad individual cuadráticas, y (ii) retornos de los activos riesgosos con distribución normal multivariante.

(i) Para distribuciones arbitrarias, el modelo media-varianza puede estar motivado si se asume la utilidad como una función cuadrática.

Bajo utilidad cuadrática, la utilidad esperada de un individuo está definida sobre los dos primeros momentos centrales de su riqueza al final del período, W [2]. Entonces, cuando las tasas de retorno esperado y las varianzas son finitas, la función de utilidad cuadrática es suficiente para que la selección de activos esté completamente descrita en términos de una relación de preferencia definida sobre la media y la varianza de los retornos esperados.

Desafortunadamente, la utilidad cuadrática tiene las propiedades indeseables de saciedad y de aversión absoluta al riesgo creciente. La propiedad de saciedad implica que un incremento de la riqueza por encima del punto de saciedad decrece la utilidad. Aversión absoluta al riesgo creciente implica que los activos riesgosos son bienes inferiores. Por ende, las conclusiones económicas basadas en el supuesto de utilidad cuadrática van generalmente contra la intuición y no son aplicables a individuos que siempre prefieren más riqueza a menos y que tratan a las inversiones riesgosas como bienes normales.

(ii) Para preferencias arbitrarias, el modelo media-varianza puede estar motivado si se asume que las tasas de retorno de los activos riesgosos se distribuyen normal multivariante.

La distribución normal está descrita completamente por su media y varianza. Bajo normalidad los momentos de orden tres y superiores pueden ser expresados en función de los dos primeros momentos y la utilidad esperada queda en función de la media y la varianza únicamente. Entonces, para funciones de utilidad que se definen sobre una riqueza a final del período que se distribuye en forma normal, el supuesto de que los retornos de los activos son normal multivariantes implica que la demanda de activos riesgosos se define sobre la base de la media y la varianza de los retornos del portafolio.

Desafortunadamente, la distribución normal no está acotada por abajo lo que es inconsistente con la respondabilidad limitada y con la teoría económica que no atribuye ningún significado al consumo negativo. Afortunadamente, la normalidad multivariante es sólamente una condición suficiente para que todos los individuos elijan portafolios eficientes en media-varianza pero no una condición necesaria.

Resumiendo, el modelo media-varianza no es un modelo general de selección de activos. La preferencia por retorno esperado y la aversión por la varianza está implícita cuando las funciones de utilidad son monótonas y estrictamente cóncavas (utilidad cuadrática) o cuando los retornos de los activos se distribuyen normal multivariante. Sin embargo, para distribuciones y funciones de utilidad arbitrarias, la utilidad esperada no puede ser definida exclusivamente por los retornos esperados y varianzas. Su rol central en la teoría financiera puede ser atribuido a su simplicidad analítica y la riqueza de sus predicciones empíricas.

[2] Ver derivación analítica en Anexo1

2.2. Enfoque moderno basado en el “Value at Risk” (VaR)

Las técnicas modernas de optimización de portafolios se han alejado bastante del enfoque de Markowitz, que introduce al análisis media varianza en la administración del riesgo. Los desarrollos modernos en optimización de portafolios son estimulados por dos requisitos básicos: (1) adecuada modelización de las funciones de utilidad, riesgos y restricciones; (2) eficiencia, es decir, la habilidad de manejar un gran número de instrumentos y escenarios.

El “Value at Risk” (VaR), medida de performance ampliamente usada responde a la pregunta: ¿cuál es la máxima pérdida que un portafolio puede enfrentar en un horizonte de tiempo definido y con una probabilidad dada? Por ejemplo, el VaR a 95% es una estimación de la máxima pérdida que un portafolio enfrentará en un horizonte definido de tiempo y que es excedida únicamente el 5% de las veces. El VaR puede ser fácilmente calculado cuando los factores de riesgo subyacentes se distribuyen normalmente. Sin embargo, para distribuciones no normales, el VaR puede tener propiedades indeseables tales como falta de subaditividad, es decir, el VaR de un portafolio de dos instrumentos puede ser mayor que la suma de los VaR individuales. Además, el VaR es difícil de optimizar para distribuciones discretas cuando se calcula usando escenarios. En este caso, el VaR es no convexo, no es continuo con respecto a las posiciones y tiene extremos locales múltiples.

A pesar de que la administración del riesgo en base al VaR es ampliamente usada y de que existen significativos esfuerzos de investigación en el área, aún no se disponen de algoritmos de optimización eficientes.

2.3. Enfoque moderno basado en el "Conditional Value at Risk" (CVaR)

Una medida de pérdidas alternativa, con propiedades más atractivas es el "Conditional Value at Risk" (CVaR). El CVaR es una medida de riesgo más consistente dado que es subaditiva y convexa, además de tener otras propiedades deseables [3].

El CVaR es consistente con el enfoque media-varianza: para distribuciones de pérdida normales, portafolios óptimos en media-varianza también son CVaR óptimos. Para distribuciones arbitrarias, experimentos numéricos indican que generalmente la minimización del CVaR también conduce a soluciones cuasi óptimas en términos de VaR ya que el VaR nunca excede el CVaR. Sin embargo, para distribuciones muy sesgadas, los portafolios que minimizan el CVaR pueden diferir bastante de los VaR óptimos.

El CVaR puede ser usado en conjunto con el VaR y es aplicable a la estimación de riesgos con distribuciones de pérdidas no simétricas. De forma similar al enfoque de media-varianza de Markowitz, el CVaR puede ser usado en el análisis riesgo-retorno.

Por definición, el B-VaR de un portafolio es el menor valor α tal que con una probabilidad B , la pérdida no superará α, mientras que el B-CVaR es la esperanza condicional de las pérdidas por encima del monto α. Los valores de B comúnmente usados son 90%, 95% y 99%. Estas definiciones aseguran que el B-VaR no supera nunca el B-CVaR, por lo que portafolios con bajos niveles de CVaR necesariamente tienen bajos VaR también.

Rockafellar y Uryasev (1999)[4] demostraron que el CVaR puede ser optimizado mediante técnicas de programación lineal. La técnica empleada en este trabajo se basa en el trabajo de Rockafellar y Uryasev donde se calcula el VaR y se minimiza el CVaR simultáneamente:

<u>Metodología propuesta por Rockafellar y Uryasev</u>

Sea f(*x,y*) la función de pérdida que depende de un vector de decisión *x* y de un vector aleatorio *y*. El vector *x* pertenece al subconjunto de portafolios factibles *X* que satisfacen las restricciones impuestas. El vector *y* representa la incertidumbre, por ejemplo, los parámetros de mercado que puedan afectar la pérdida.

Para cada *x*, la pérdida f(*x,y*) es una variable aleatoria con una distribución inducida por la de *y*. Por conveniencia, se asume que la distribución de probabilidad de *y* tiene una densidad p(*y*). Sin embargo, la existencia de la densidad no es crítica para la metodología en cuestión; este supuesto puede ser relajado.

La probabilidad de que la pérdida f(*x,y*) no exceda el valor α está dada por

$$\Psi(x,\alpha) = \int_{f(x,y)<\alpha} p(y)dy \qquad (1)$$

Como función de α para *x* fijo, $\Psi(x,\alpha)$ es la función de distribución acumulada de la pérdida asociada a *x*. Determina completamente el comportamiento de esta variable y es fundamental en la definición de VaR y CVaR. La función $\Psi(x,\alpha)$ es no decreciente con respecto a α y por simplicidad, se asume que es continua con respecto a α.

[3] Artzner, P, Delbaen, F, Eber, J.M. y Heath, D. -. " Coherent Measures of Risk". Mathematical Finance, 9 (1999).
[4] Rockafellar, R.T. y Uryasev, S., "Optimization of Conditional Value at Risk", (1999).

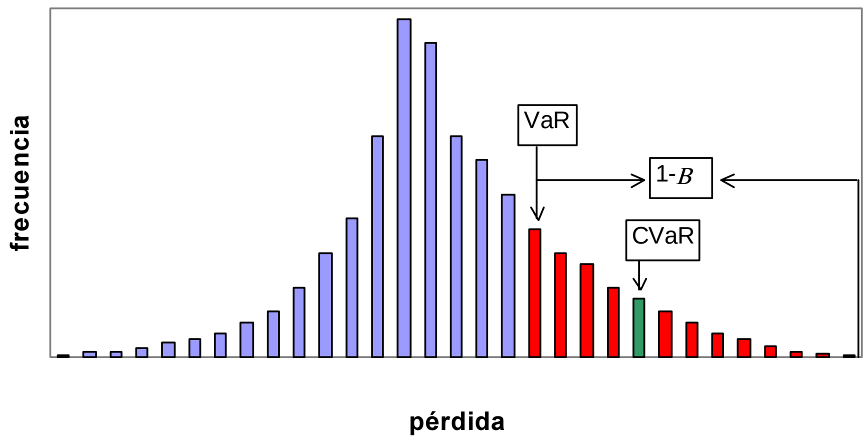
Los valores del β-VaR y β-CVaR de la variable aleatoria pérdida asociados a x y un nivel de probabilidad β en (0,1) se denotan como $\alpha_\beta(x)$ y $\Phi_\beta(x)$. En nuestro contexto, vienen dados por

$$\alpha_\beta(x) = \min\{\alpha \in R : \Psi(x,\alpha) \geq \beta\} \tag{2}$$

y

$$\phi_\beta(x) = (1-\beta)^{-1} \int_{f(x,y)\geq\alpha_\beta(x)} f(x,y)p(y)dy \tag{3}$$

En la primer fórmula, $\alpha_\beta(x)$ surge del extremo izquierdo del intervalo no vacío de los valores α tales que $\Psi(x,\alpha)=\beta$. En la segunda fórmula, la probabilidad de que f(x,y) sea mayor o igual que $\alpha_\beta(x)$ es igual a (1-β). Entonces, $\Phi_\beta(x)$ es la esperanza de la pérdida, condicionada a que la misma excede $\alpha_\beta(x)$.



Es difícil manipular CVaR dado la función VaR, $\alpha_\beta(x)$, involucrada en su definición, a menos que tengamos una representación analítica del VaR. La idea básica de este enfoque es que se puede definir una función mucho más simple que se puede usar en lugar de CVaR

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + (1-\beta)^{-1} \int_{f(x,y)\geq\alpha} (f(x,y)-\alpha)^+ p(y)dy \tag{4}$$

donde $(t)^+ = \max(0,t)$. Se puede demostrar que: (i) la función $F_\beta(x,\alpha)$ es convexa con respecto a α; (ii) VaR es el punto mínimo de esta función con respecto a α ; y (iii) minimizar $F_\beta(x,\alpha)$ con respecto a α da como resultado el CVaR.

$$\phi_\beta(x) = F_\beta(x,\alpha_\beta(x)) = \min_\alpha F_\beta(x,\alpha) \tag{5}$$

La función $F_\beta(x,\alpha)$ permite calcular el CVaR sin tener que calcular previamente el VaR sobre el que depende su definición. Más aún, dicha función sirve para calcular simultáneamente el VaR y el CVaR óptimo. La minimización de esta función con respecto a x y a α optimiza el CVaR y encuentra el VaR simultáneamente. Sea (x^*,α^*) una solución de la minimización anterior, entonces $F_B(x^*,\alpha^*)$ es igual al CVaR óptimo, el portafolio óptimo es x^* y el VaR correspondiente es α^*.

En general, el integral de (4) se puede aproximar modelando la variable aleatoria y mediante escenarios de acuerdo a su densidad p(y). Si los escenarios resultan en una colección de vectores y^1, y^2,...., y^q con idénticas probabilidades, 1/q, entonces, la aproximación correspondiente de (4) es

$$\tilde{\tilde{F}}_\beta(x,\alpha)=\alpha+\frac{1}{q(1-\beta)}\sum_{j=1}^{s}(f(x,y^j)-\alpha)^+ \tag{6}$$

La expresión (6) es convexa y lineal con respecto a α. A pesar de no ser diferenciable con respecto a α, puede ser minimizada por técnicas de programación lineal.

El portafolio CVaR óptimo se obtiene de resolver sobre α y x, el problema

$$\begin{aligned}
&\min \tilde{\tilde{F}}_\beta(x,\alpha)\\
&s.a\\
&x^T y \geq r\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\\
&x_i \geq 0, i=1,...,n
\end{aligned}$$

donde r es el retorno requerido.

El problema se reduce a un problema de programación lineal y se resuelve con algoritmos especializados [5].

[5] Los algoritmos empleados en este trabajo fueron desarrollados por MSc Carlos Testuri utilizando el lenguaje computacional "GAMS".

3. Aplicación de las Teorías del Portafolio a los Fondos de Ahorro Previsional de Uruguay

Se analizan tres casos: *(i) "Portafolio Global Agregado"*, donde se combina por un lado el portafolio de todo del sistema de ahorro previsional de Uruguay considerado en forma agregada y por el otro cuatro índices representativos de inversión en el exterior; *(ii) "Portafolio Local Desagregado"*, donde se combinan únicamente índices de instrumentos "locales", representativos de cada grupo de instrumentos en los que las AFAP pueden invertir. Se imponen restricciones a la participación máxima de cada instrumento o grupo de ellos ya sea por limitaciones legales o impuestas por el propio mercado; y *(iii) Portafolio Global Desagregado"*, donde se combinan los distintos índices representativos de inversiones locales con los índices de inversión en el exterior empleados en el caso (i). Se emplean las mismas restricciones impuestas en el caso (ii) y se agregan restricciones a la participación de la inversión en el exterior.

Para cada uno de estos tres casos, se aplican las técnicas de optimización de portafolios descritas en las secciones 1.1 (enfoque media-varianza) y 1.3 (minimización del CVaR).

3.1. Datos

(i) "Portafolio Global Agregado"

Se considera la serie de retornos promedio mensuales del sistema de Administradoras de Fondos de Ahorro Previsional (AFAP) de Uruguay tomado en su conjunto y cuatro series de retornos promedio mensuales de instrumentos financieros internacionales. El período comprendido abarca desde julio de 1996 (inicio del Nuevo Régimen Jubilatorio promulgado por la Ley 16.713 del 3 de septiembre de 1995) hasta septiembre de 2003 y las series están expresadas en dólares corrientes.

Como instrumentos financieros internacionales se seleccionaron índices de retorno total de bonos del tesoro elaborados por JP Morgan para Estados Unidos (JPMTUS) y para Europa (JPMTEURO)[6] e índices accionarios representativos del mercado estadounidense (MSUS) y europeo (MSEURO) elaborados por Morgan Stanley[7].

(ii) "Portafolio Local Desagregado"

En esta versión del trabajo se emplean series de retorno representativas de los grupos de instrumentos en los cuales las AFAP están autorizadas a invertir e invirtieron a lo largo de su historia[8]:

- Literal A: instrumentos emitidos por el Estado uruguayo
- Literal B: instrumentos emitidos por el Banco Hipotecario del Uruguay o por el Banco Central del Uruguay
- Literal C: depósitos a plazo en instituciones financieras
- Literal D: instrumentos emitidos por empresas

---

[6] Estos índices fueron extraídos de "Bloomberg" y/o facilitados por su proveedor.

[7] Estos índices fueron extraídos de "Bloomberg".

[8] Aunque la Ley permite inversiones en el "Literal E (valores representativos de inversiones productivas)" en los hechos las AFAP no invirtieron en este literal hasta diciembre de 2002 por lo que se excluye este instrumento del ejercicio que se plantea en el presente trabajo.

- Literal F: préstamos al consumo
- Disponibilidades

Se construyeron índices de retorno total acumulado para cada uno de estos literales cuya metodología se presenta en el Anexo 2.

El período de análisis se restringe de mayo de 1998 a septiembre de 2003 ya que previo a esa fecha no es posible construir índices para todos los literales debido a que no existían en el mercado instrumentos para cada uno de ellos y la técnica empleada en este trabajo requiere que todas las series estén balanceadas (abarquen el mismo periodo de tiempo). Recién a partir de mayo de 1998 se cuenta con índices de retorno total para los seis "instrumentos locales" considerados.

(iii) "Portafolio Global Desagregado"

En este caso se emplean las series de retornos representativos de cada literal usadas en la versión (ii) (Literal A, B, C, D, F y disponibilidades), conjuntamente con los retornos de los activos internacionales empleados en la versión (i) del presente trabajo (JPMTUS, JPMTEURO, MSUS y MSEURO).

Un insumo esencial en la teoría del portafolio, ya sea tradicional o moderna es la matriz de covarianzas y el vector de retornos medios. La matriz de covarianzas muestral y la media son estadísticamente aceptables si las series son estacionarias. Se realizaron los Tests de Dicky Fuller y Phillips-Perron para descartar la presencia de raíces unitarias. Las pruebas mostraron que todas las series de retornos utilizadas son estacionarias, por lo que se procedió a utilizar la matriz de covarianzas y el vector de retornos muestrales para el ejercicio en consideración.

3.2. Resultados

i. <u>“Portafolio Global Agregado”</u>

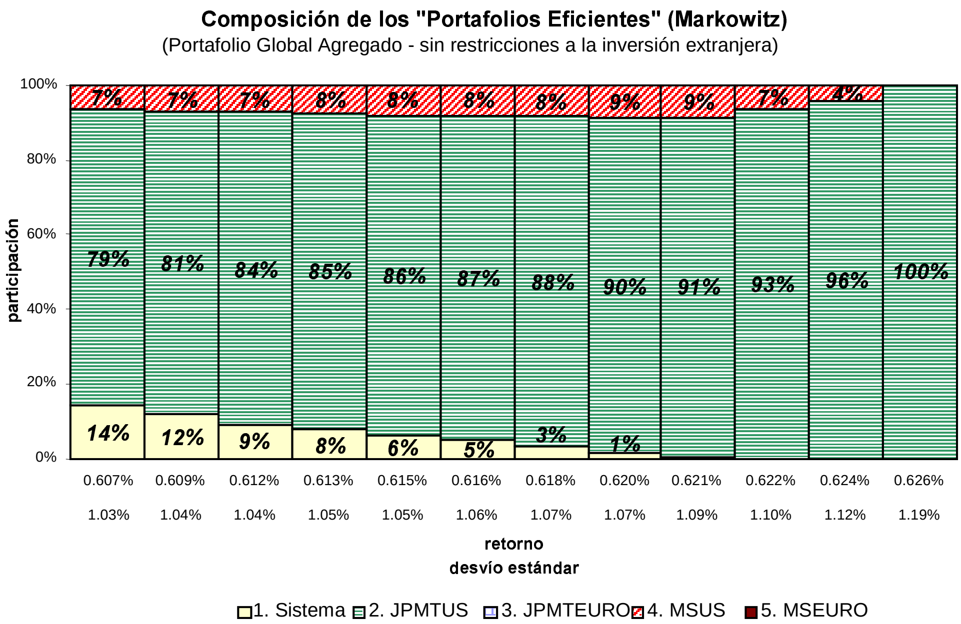
La tabla siguiente presenta las principales estadísticas de las series empleadas en esta versión del trabajo (datos desde julio 1998 a septiembre 2003):

	Sistema	JPMTUS	JPMTEURO	MSUS	MSEURO
retorno promedio	0.52%	0.63%	0.47%	0.58%	0.57%
desvio estandar	2.41%	1.19%	2.80%	4.11%	4.44%
VaR(95%)	5.50%	1.77%	3.67%	6.63%	6.94%
CVaR(95%)	6.99%	2.35%	4.00%	9.18%	9.90%
desv.est/retorno	4.7	1.9	5.9	7.1	7.8
CVaR/retorno	13.6	3.8	8.4	15.9	17.5

i.a. <u>Modelo Media-Varianza de Markowitz</u>

i.a.a. sin restricciones a la inversión en el exterior

Se procedió a calcular la composición de los portafolios óptimos en media-varianza para un rango de retornos de entre 0,50% mensual (el retorno promedio mensual histórico del “Sistema” fue de 0,52% expresado en dólares) y 0,63% mensual (equivalente al retorno promedio histórico del activo que más rindió: JPMTUS).



El riesgo del portafolio de las AFAP medido por su desviación estándar se pudo haber reducido en forma considerable de haberse permitido la inversión en el exterior: para un retorno 0,52% mensual el sistema de AFAP asumió un riesgo de 2,41% mensual, mientras que el mismo retorno se pudo haber alcanzado con un desvío estándar de 1,65% invirtiendo un 59% en el exterior (Anexo 3, Tablas 1 y 2). Mas aún, el portafolio compuesto por un 41% en el portafolio del sistema y el resto en el exterior, tampoco es eficiente en media-varianza: se logra aumentar el retorno hasta 0,61% y simultáneamente reducir el riesgo a 1,03% al incrementar la participación extranjera en el portafolio hasta un 86% del mismo. Si se desea obtener un retorno aun mayor, este se alcanzaría a costa de una mayor volatilidad aumentando la participación de inversión extranjera hasta el 100% del portafolio.

Por otro lado se observa que el mix de inversión extranjera de los portafolios eficientes, incluyen únicamente instrumentos norteamericanos, de renta fija principalmente y en menor medida en renta variable. Los instrumentos de Europa quedan excluidos de los portafolios eficientes en media-varianza.

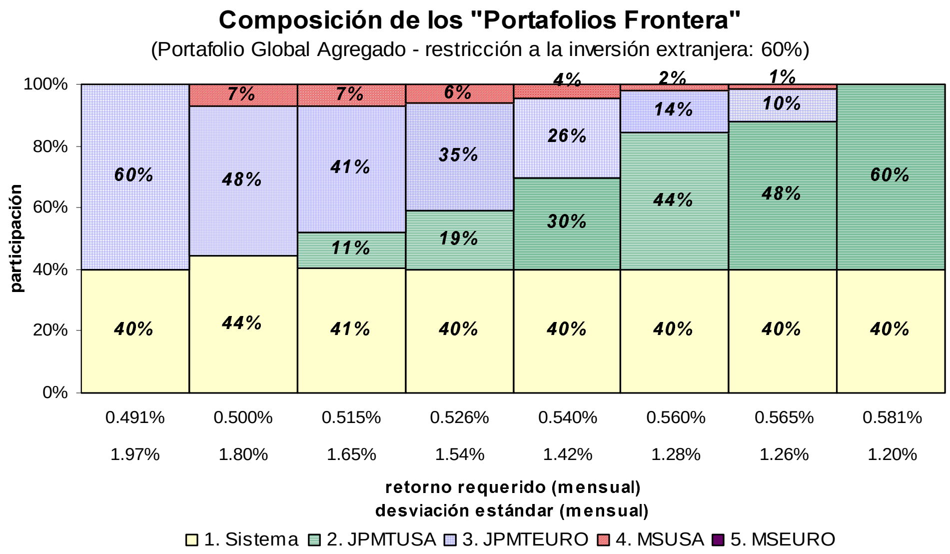
Siandra y Testuri (2001) encuentran que para un retorno de 6% anual, el portafolio de mínima varianza estaría compuesto de 98% por el "Sistema" y el 2% restante por inversión extranjera. En el otro extremo, para un retorno anual de 15% la composición óptima sería 65% "Sistema" y 35% de inversión extranjera (principalmente NASDAQ100). En el presente trabajo, la participación de la inversión extranjera en los portafolios óptimos variaba entre 86% y 100%. Sin embargo, hay tres razones que probablemente estén explicando los diferentes resultados: i) el periodo de análisis usado en un caso y otro es distinto. Mientras que en su trabajo Siandra y Testuri emplean datos mensuales desde julio de 1997 a diciembre de 2000, el presente trabajo extiende el periodo hasta septiembre de 2003, lo cual agrega momentos de fuerte volatilidad en el mercado financiero local; ii) a pesar de que la frecuencia de los datos empleados es la misma (mensual), el horizonte de medición de los retornos no lo es: Siandra y Testuri trabajan con retornos de 12 meses móviles, mientras que en este trabajo los retornos se miden para periodos mensuales, lo que introduce mayor volatilidad a las series; iii) la tercer gran diferencia son las series de activos internacionales empleados: mientras que Siandra y Testuri trabajan únicamente con índices accionarios como inversión en el exterior[9], aquí se trabajo además con índices de bonos del Tesoro.

i.a.b. con restricción a la inversión en el exterior

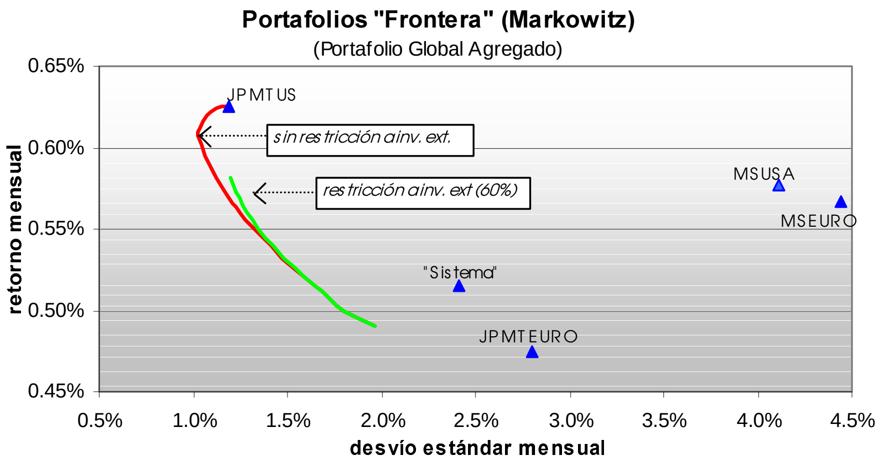
Si imponemos un tope máximo a la inversión en el exterior de 60%, justificado por el tope máximo que tienen las AFAP para inversiones en moneda extranjera, los portafolios factibles pasan a ser "ineficientes" en media-varianza (se vio en el inciso anterior, que los portafolios eficientes requieren de por lo menos un 86% de inversión en el exterior).

No obstante lo anterior, al permitir un 60% de inversión en el exterior, específicamente en bonos del tesoro norteamericanos, se logra tanto aumentar el retorno del portafolio (de 0,52% a 0,58% mensual) como disminuir el riesgo del mismo (de 2,41% a 1,2%) mensual (Anexo 3, Tablas 1 y 2).

[9] Específicamente, trabajan con doce índices accionarios seleccionados por su representatividad Geográfica: DJIA, S&P500, NASDAQ100 para EEUU, FTSE100 para Europa, CAC40 para Francia, DAX para Alemania, FT30 para Reino Unido, NIKKEI225 para Japón, HS para Hong Kong, MERVAL para Argentina, BOVESPA para Brasil, IGPA para Chile y MXIPC para Méjico.



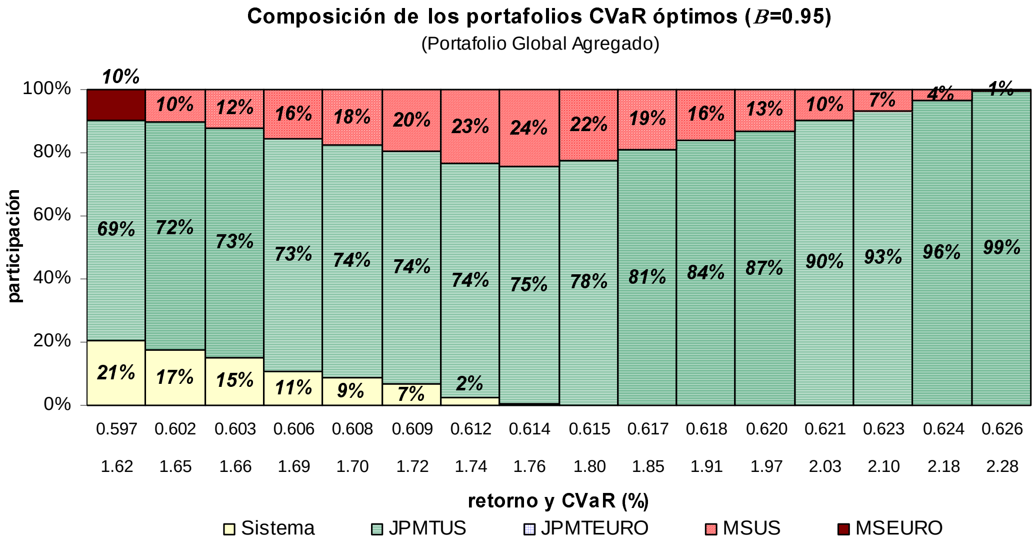
En el gráfico que sigue se observan las ganancias de eficiencia en media-varianza que habría posibilitado la liberalización de la restricción legal a la inversión en el exterior.



i.b. *<u>Minimización del CVaR</u>*

i.b.a. Sin restricción a la inversión en el exterior

Se calcularon los portafolios CVaR óptimos para un nivel de confianza de 95%[10]. En este caso, la frontera eficiente comienza a partir de un retorno de 0,597% mensual (Anexo 3, Tabla 3). Es decir, para cada portafolio con retorno inferior a 0,597%, existe otro con el mismo CVaR pero con mayor retorno ofrecido. Por lo tanto, el retorno de 0,52% mensual (promedio histórico del Sistema) no es eficiente en media-CVaR. Se había visto que tampoco lo era en media-varianza. Es posible aumentar el retorno a 0,6% y disminuir el CVaR a 1,62% invirtiendo 69% en bonos norteamericanos, 10% en acciones europeas y el resto en el portafolio "Sistema". También es factible aumentar el retorno del portafolio a 0,63% aumentando el CVaR a 2,28% (inferior a 6,99% que presenta el portafolio "Sistema) si se invierte 99% en JPMTUS y el 1% restante en acciones de Europa.



Para el rango de retornos factibles de 0,597% a 0,626%, los CVaR se ubican entre 1,62% y 2,28% mensual y los VaR entre 1,25% y 1,64% respectivamente. Es decir, para un retorno exigido de 0,597% mensual, la máxima pérdida esperada en un horizonte de un mes con un nivel de confianza de 95% (VaR) es de 1,25%, y la pérdida esperada en el 5% de los peores casos se ubica en 1,62% para el mismo horizonte de temporal (CVaR).

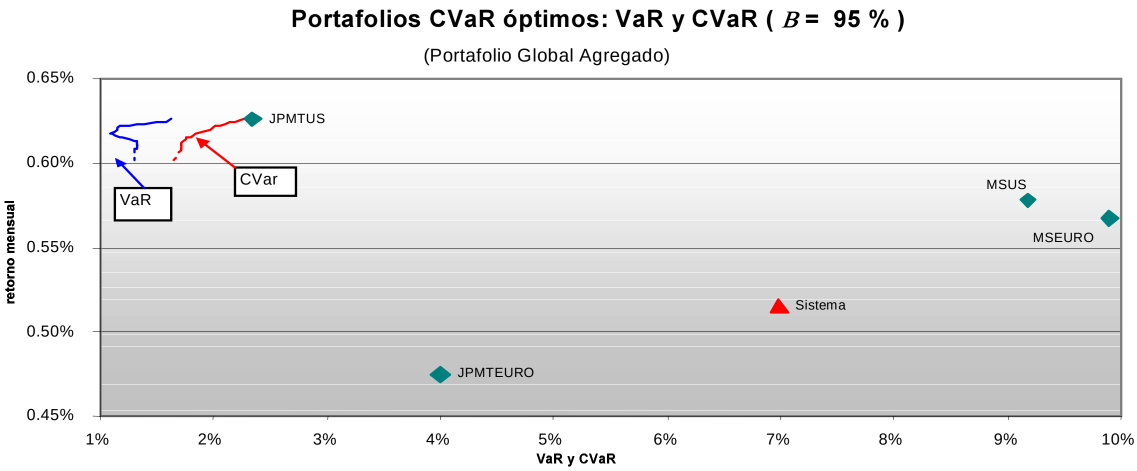
La composición de los portafolios óptimos en media-CVaR no son muy distintos a los portafolios de mínima varianza: para un retorno mensual de 0,606%, el portafolio CVaR óptimo se compone de 11% en el "Sistema", 73% en bonos soberanos norteamericanos (JPMTUS) y 16% en acciones estadounidenses (MSUS), mientras que el portafolio óptimo en media-varianza está compuesto de 14% en el "Sistema", 79% en JPMTUS y 7% en MSUS. En el otro extremo, para un retorno exigido de 0,626%, el portafolio CVaR-óptimo se compone en un 99% de bonos soberanos norteamericanos y el 1% restante de acciones estadounidenses, mientras que el de

[10] Se repite el ejercicio para niveles de confianza de 90% y 99% cuyos resultados se presentan en el Anexo 3, Tabla 3 y Gráficos 1 a 5.

mínima varianza está compuesto exclusivamente por bonos del tesoro norteamericanos.

Los resultados de Siandra y Testuri (2001) para el enfoque de minimización del CVaR no difiere demasiado de los resultados que obtuvieron con el enfoque de media-varianza: los portafolios óptimos se componen principalmente del "Sistema" (100% para un retorno de 6% mensual y 75% para uno de 15%) y el resto del NASDAQ100. Las posibles razones que explican las diferencias entre estos resultados y los obtenidos en el presente trabajo se expusieron líneas atrás.

El gráfico que sigue muestra la frontera eficiente en el plano media-CVaR y sus respectivos VaR. Se observa que a mayor retorno exigido, mayor es el CVaR (el CVAR es una función convexa con respecto al retorno). No sucede lo mismo con el VaR, donde se observan tramos donde éste es una función no convexa con respecto al retorno exigido.



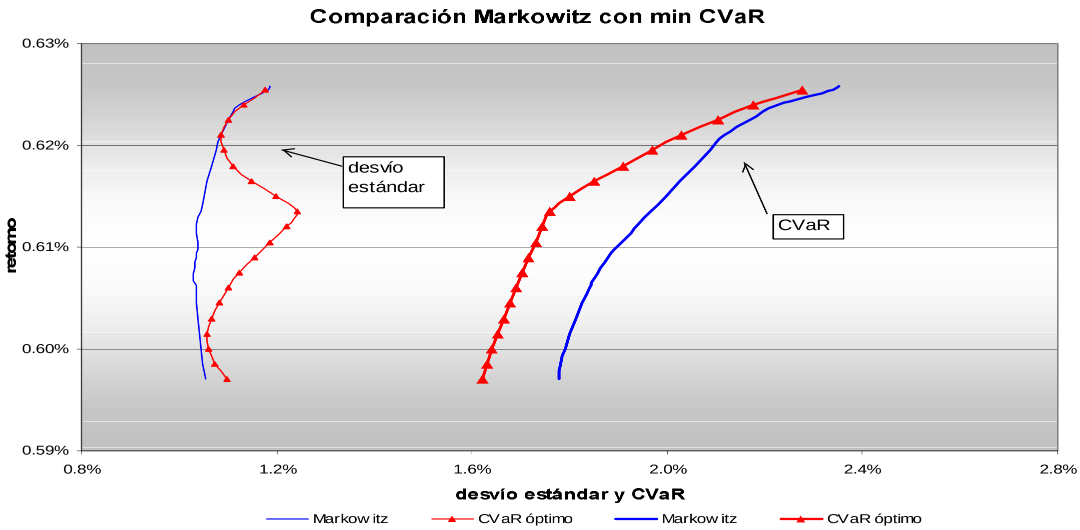
Como se aprecia en el gráfico, el portafolio de las AFAP (Sistema) es ineficiente en el plano media-CVaR. Es posible aumentar el retorno del portafolio en forma sustancial y reducir el riesgo simultáneamente al permitir la inversión en instrumentos del exterior.

i.b.b. Con restricciones a la inversión extranjera

Si se restringe la participación de la inversión en el exterior a un máximo de 60%, los portafolios factibles dejan de ser eficientes en media CVaR dado que estos requieren de por lo menos un 79% de inversión en el exterior. Por lo tanto, al restringir al 60% la inversión en el exterior el portafolio resultante estará invertido 60% en instrumentos del exterior y el 40% restante en el portafolio "Sistema".

i.c. <u>Comparación de ambos enfoques</u>

A pesar de que los portafolios CVaR óptimos, son similares a los óptimos en media-varianza, no son idénticos. Si el objetivo es minimizar la varianza (Markowitz), el CVaR de los portafolios resultantes es mayor que el de los portafolios CVaR óptimos. Si por el contrario el objetivo es minimizar el CVaR, los portafolios ya no son de mínima varianza.



Ambos enfoques coincidirían si los retornos de los activos del portafolio se distribuyeran en forma normal multivariante.

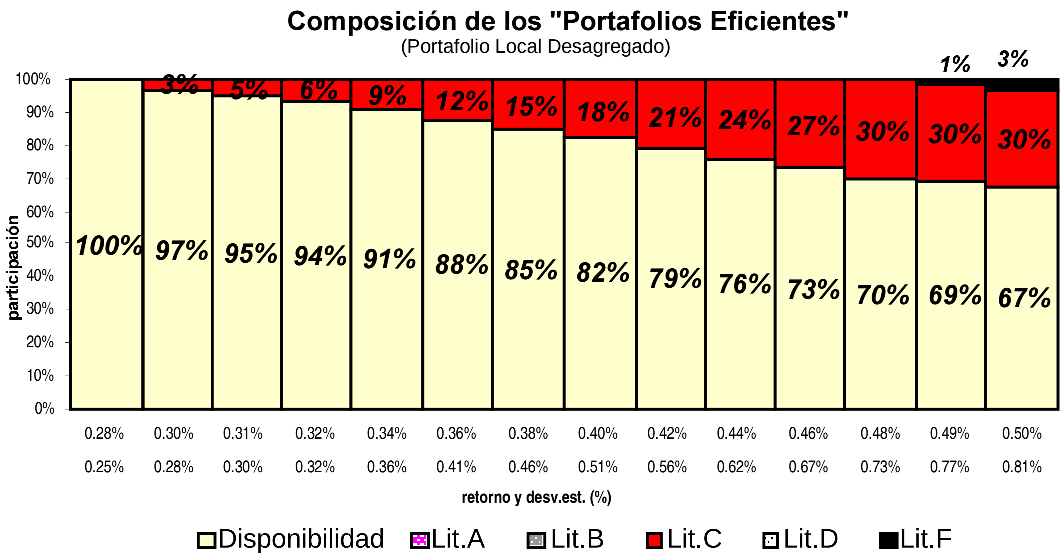
ii. ***"Portafolio Local Desagregado"***

La tabla siguiente presenta las principales estadísticas de las series empleadas en esta versión del trabajo (datos desde mayo 1998 a setiembre 2003):

	Sistema	Disponibilidad	Lit.A	Lit.B	Lit.C	Lit.D	Lit.F	JPMTUS	MSUS	JPMTEURO	MSEURO
retorno promedio	0.42%	0.28%	0.07%	0.28%	0.95%	-0.21%	1.06%	0.576%	-0.01%	0.581%	-0.12%
desvío estandar	2.78%	0.25%	4.13%	5.35%	2.08%	3.54%	3.84%	1.28%	4.27%	3.04%	4.49%
VaR	6.02%	0.97%	0.97%	1.01%	1.08%	1.20%	1.24%	1.31%	1.40%	1.43%	1.40%
CVaR	7.42%	1.16%	1.19%	1.22%	1.27%	1.43%	1.48%	1.51%	1.53%	1.55%	1.57%
desv.est. / retorno	6.6	0.9	57.6	18.8	2.2		3.6	2.2		5.2	
CVaR / retorno	17.7	4.1	16.7	4.3	1.3		1.4	2.6		2.7	

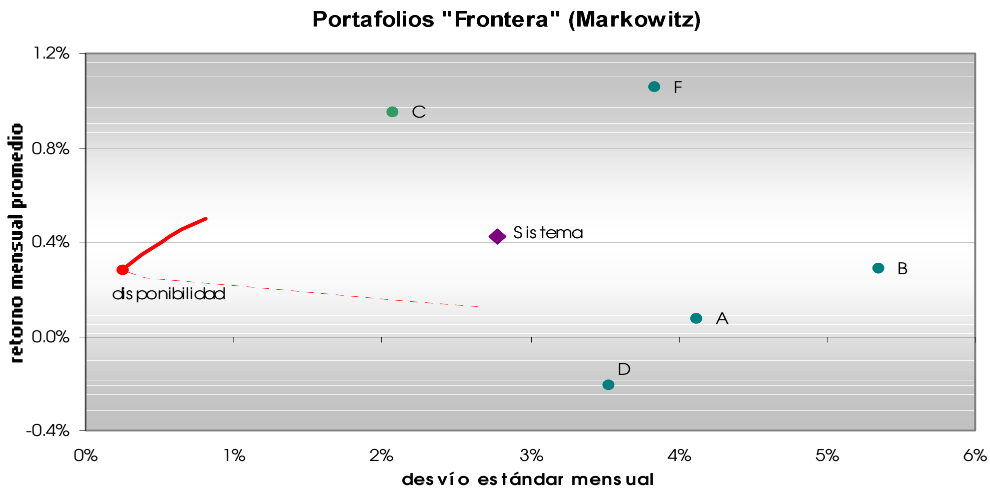
ii.a. Modelo Media-Varianza de Markowitz

En este punto, se procedió a encontrar la composición de los portafolios de mínima varianza invertidos exclusivamente en instrumentos locales, para un rango de retornos de 0,28% a 0,50% mensual en dólares (Anexo 3, Tablas 4 y 5).



Se observa que el portafolio de mínima varianza se compone únicamente de “disponibilidades”, arroja una rentabilidad promedio de 0,28% mensual y su desvío estándar es de 0,25% mensual. A medida que aumenta el retorno requerido, las disponibilidades disminuyen en participación dando lugar al Literal C hasta que éste alcanza el tope legal de 30% del portafolio. A partir de este punto, aumentos de retorno se logran con la inclusión del Literal F cuya ponderación comienza a ser positiva. El máximo retorno factible (0,50% mensual) se logra con un 67% de disponibilidades, 30% de Literal C (tope legal) y 3% de Literal F (restricción impuesta por el mercado) y el desvío estándar correspondiente se ubica en 0,81%.

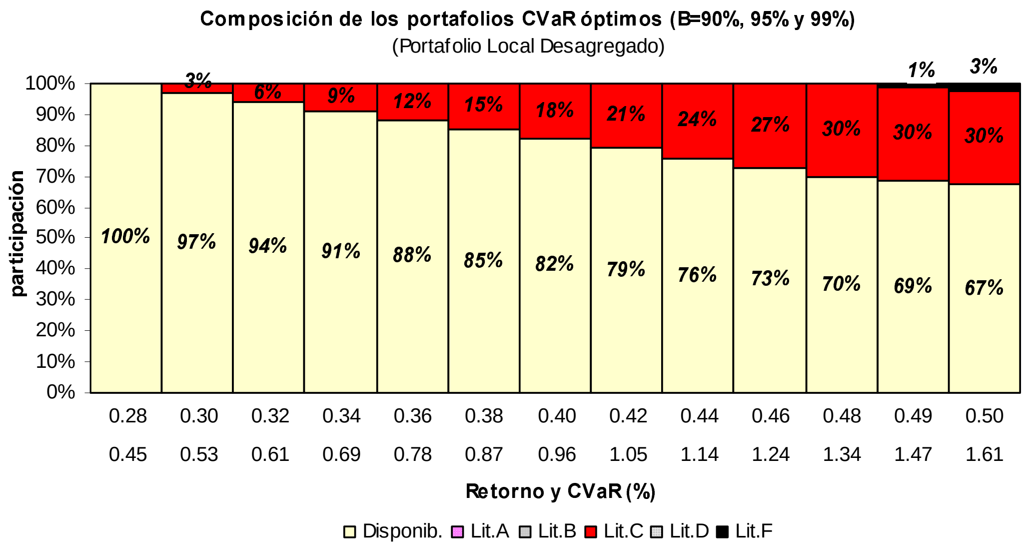
El gráfico siguiente muestra la distribución de los diferentes “activos” en el plano riesgo-retorno, y la frontera eficiente “local”.



Para un retorno histórico de 0,42% mensual, el Sistema asumió un riesgo de 2,78% mensual. Se podría haber logrado el mismo retorno pero con un riesgo de 0,56% de haberse invertido 79% del portafolio en disponibilidades y el 21% restante en Literal C. Por otro lado, también habría sido posible aumentar el retorno a 0,50% mensual asumiendo un riesgo de 0,81%, inferior al desvió estándar histórico del Sistema, de haberse invertido 67% en disponibilidades, 30% en literal C y 3% en literal F.

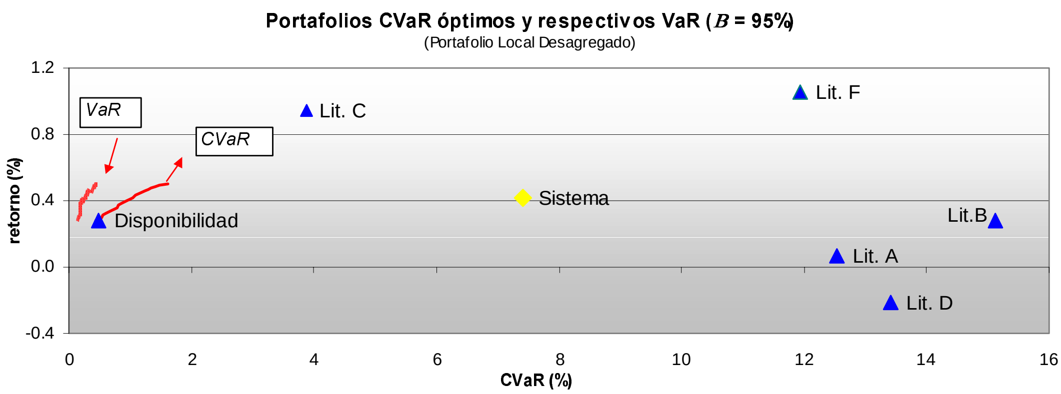
ii.b. *Minimización del CVaR*

En el caso "Portafolio Local Desagregado", los portafolios óptimos en media-CVaR para los tres niveles de confianza analizados (90%, 95% y 99%) coinciden, reflejando que los resultados son muy robustos (Anexo 3, Tabla 5).



Por otro lado, los portafolios CVaR óptimos coinciden con los de mínima varianza (Anexo 3, Tabla 5), lo que podría estar indicando que los datos se han comportado históricamente como una normal multivariante.

El grafico que sigue representa la frontera eficiente en media-CVaR para el portafolio local y los VaR correspondientes a cada portafolio optimo. Se observa que para un retorno promedio de 0,42% mensual, como el arrojado por el Sistema desde mayo de 1998, el portafolio optimo, compuesto por 79% de disponibilidades y 21 % en Literal C presentaría un CVaR de 1,05%, significativamente inferior al CVaR de 7,42% que arroja el "Sistema".

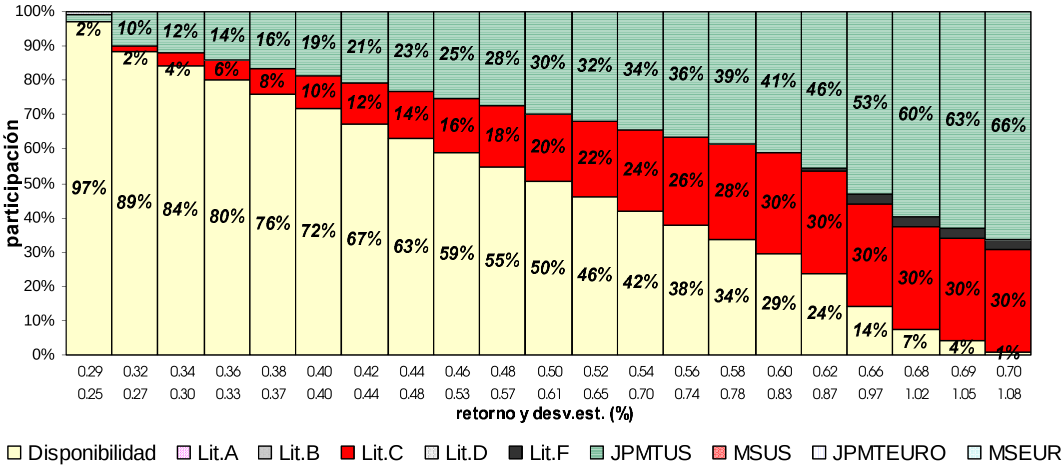


iii. *"Portafolio Global Desagregado"*

iii.a. *Modelo Media-Varianza de Markowitz*

Ahora, además de permitir la desagregación entre los distintos "instrumentos" locales en los que está permitido invertir, se introduce la posibilidad de inversión en el exterior de forma irrestricta. El rango de retornos "eficientes" va de 0,29% a 0,70% mensual, y sus correspondientes desviaciones estándar se ubican entre 0,25% y 1,08% (Anexo 3, Tabla 7).

Composición de los "Portafolios Eficientes" (Markowitz)
(Portafolio Global Desagregado - sin restricción a la inversión extranjera)



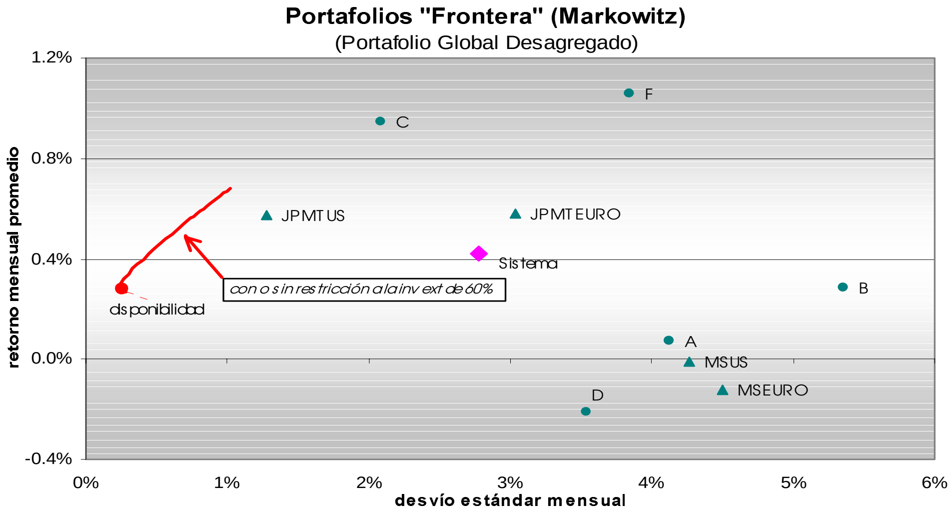
Se observa que para cualquier nivel de retorno requerido, es óptima la inversión en el exterior. Para niveles de retorno bajos, casi la totalidad del portafolio se compone de disponibilidades y en menor medida de inversión en bonos del gobierno estadounidense (JPMTUS) y europeo (JPMTEURO). A medida que aumenta el retorno exigido, disminuye la participación de las disponibilidades hasta un mínimo de 1%, aumenta la participación de JPMTUS hasta un máximo de 66%, y se incorpora la inversión en Literal C hasta llegar al tope legal de 30% del portafolio[11]. Para niveles de retorno superiores a 0,62%, aumentos de retorno requieren de la incorporación de Literal F, que para retornos de 0,66% o superiores alcanza la restricción impuesta por la oferta del mercado de 3% del portafolio.

Si se restringe la inversión extranjera al 60% del portafolio, se obtienen los mismos resultados que sin restricciones, para el rango de retornos de 0,29% a 0,68% mensual. Bajo esta restricción ya no es factible obtener retornos superiores a 0,68%, sin violar alguna de las otras restricciones impuestas sobre los instrumentos locales.

La Frontera Eficiente en media-varianza para el "Portafolio Global Desagregado" muestra las ganancias en eficiencia que se lograrían con la posibilidad de invertir en instrumentos financieros del exterior. El retorno promedio del sistema, que desde mayo de 1998 a septiembre de 2003 se ubica en 0,42% mensual se habría logrado con un riesgo, medido por la desviación estándar, de 0,44% en lugar de 2,78%.

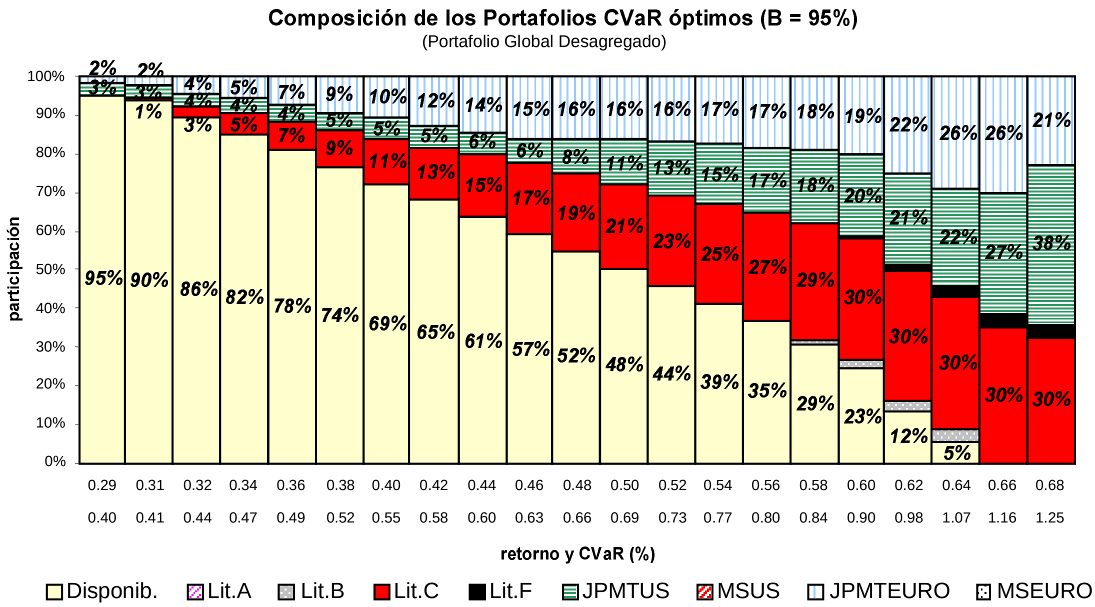
---

[11] Se repitió el ejercicio modificando el Literal C para que este refleje la perdida de valor que en teoría debió darse en los depósitos en las instituciones bancarias intervenidas a partir de agosto de 2002 y que no se vio reflejada en la valuación de los portafolios de las AFAP. Los resultados se presentan en el Anexo 3, Tablas 9 y 10; Gráficos 15, 16 y 17.

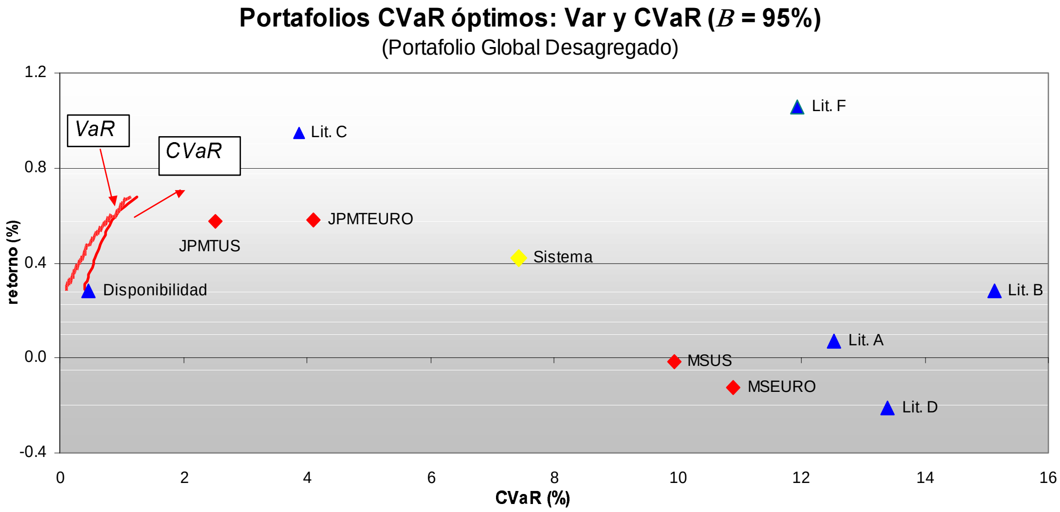


iii.b. *Minimización del CVaR*

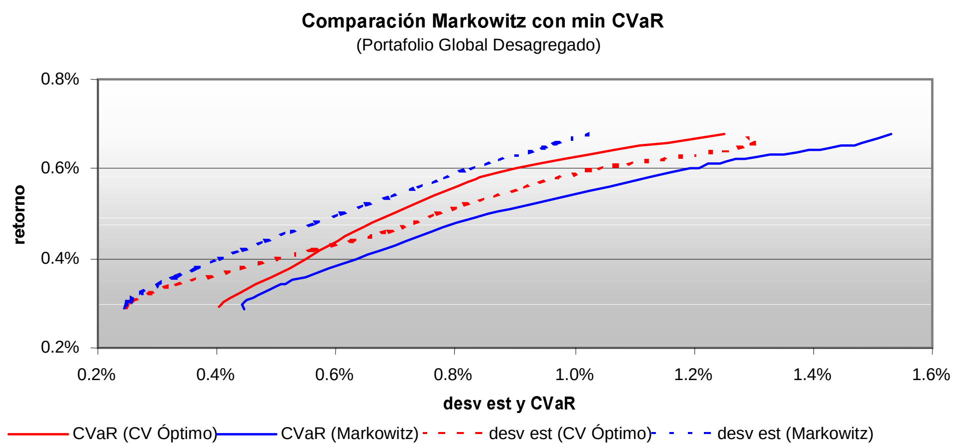
Al igual que para el caso de los portafolios de mínima varianza, los portafolios CVaR óptimos factibles ofrecen un rango de retornos de 0,29% a 0,68% mensual para el caso en que el tope máximo a la inversión en el exterior es de 60%. La composición de los portafolios eficientes en media-CVaR es similar a la de los “portafolios de Markowitz”. La principal diferencia es que mientras que en estos últimos la inversión extranjera se compone únicamente de bonos del tesoro norteamericanos, los portafolios CVaR óptimos ponderan en forma similar los bonos del tesoro de Estados Unidos y los europeos.



El retorno de 0,29% se logra con un 95% invertido en disponibilidades, 3% en JPMTUS y 2% en JPMEURO. En el otro extremo, el retorno máximo factible (0,68% mensual), se logra con un 59% de inversión en el exterior (38% en JPMTUS y 21% en JPMTEURO) y 41% en instrumentos locales de los cuales el 73% corresponde a Literal C. En el caso de Markowitz, el retorno de 0,68% se lograba con un 60% en el exterior (totalmente invertido en JPMTUS) y el 40% restante en inversión local, donde el Literal C ocupaba el 75% del portafolio local.



La similitud entre los portafolios CVaR óptimos y los de mínima varianza se ve reflejada en el gráfico siguiente donde se presentan los desvíos estándar y los CVaR para los portafolios eficientes según ambos enfoques.



A pesar de la similitud, se observa que los portafolios de mínima varianza no son eficientes en términos de CVaR, ni los portafolios CVaR óptimos lo son en términos de varianza.

4. Conclusiones

De la serie de análisis realizados en el presente trabajo, se concluye que la inversión en el exterior de una parte de los fondos de ahorro previsional de Uruguay habría permitido una mejor gestión por parte de las administradoras. Tanto los estudios realizados a nivel del "Portafolio Agregado", como los realizados permitiendo la desagregación del portafolio de las AFAP en los distintos instrumentos locales, demuestran que la inversión en el exterior habría permitido mejorar la eficiencia de los portafolios ya sea aumentando el retorno para un mismo riesgo asumido o reduciendo el riesgo para un mismo retorno.

En la versión "Portafolio Desagregado", tanto el enfoque de Markowitz como el de optimización del CVaR empleados en este estudio demuestran que para lograr un retorno de 0,44% mensual en dólares (promedio histórico de las AFAP desde mayo de 1998) habría sido óptimo invertir aproximadamente un 20% del portafolio en el exterior. Sin embargo, cuando se considera el portafolio de las AFAP en forma agregada , la participación óptima de la inversión en el exterior alcanza el tope máximo de 60% impuesto en el ejercicio de optimización.

La diversificación de los portafolios a nivel internacional habría permitido a las AFAP aumentar el retorno de sus portafolios hasta 0,68% con niveles de riesgo de 1,02% medido por la desviación estándar mensual o de 1,25% medido por el CVaR. Ambos niveles de riesgo son inferiores al presentado por el Sistema, cuyo desvío estándar se ubicó en 2,78% y el CVaR estimado en 7,42%.

Dentro de los instrumentos extranjeros, el JPMTUS es el "activo dominante" dado que es el que ofrece el mayor retorno con el menor riesgo, medido ya sea por la desviación estándar o por el CVaR. Los resultados evidencian lo anterior: la mayor parte de la inversión en el exterior óptima se compone de JPMTUS. La excepción es la versión "Portafolio Global Desagregado" para el enfoque de minimización del CVaR, donde la inversión en instrumentos extranjeros se distribuye entre JPMTUS y JPMTEURO en proporciones similares.

En cuanto al portafolio de "instrumentos locales", las composiciones óptimas coinciden tanto para el enfoque de mínima varianza de Markowitz como para el enfoque moderno de minimización del CVaR. Dentro de los instrumentos locales no existe ningún activo que domine al resto en el plano riesgo – retorno. Sin embargo, los Literales A, B y D son dominados por alguno de los otros tres. Los portafolios óptimos locales se componen, por lo tanto, de disponibilidades, Literal C y Literal F en proporciones que dependerán del nivel de retorno requerido.

Al levantar la restricción de inversión en el exterior, los portafolios óptimos incorporan la inversión en el exterior además de los tres instrumentos locales vistos (disponibilidades, Literales C y F). De acuerdo al enfoque de Markowitz, incrementos de retorno requerido se logran con la sucesiva sustitución de disponibilidades por Literal C, F y bonos soberanos estadounidenses (JPMTUS) dependiendo del nivel de retorno. Con el enfoque de optimización del CVaR, aumentos de retorno también se logran con la incorporación de Literal C, F y de inversión en el exterior a medida que disminuye la participación de las disponibilidades. Sin embargo en este caso, la inversión en el exterior estará compuesta tanto de (JPMTUS) como de bonos del tesoro de Europa (JPMTEURO).

Es importante dejar claro que los enfoques de optimización empleados en este trabajo no carecen de limitaciones. Tanto el enfoque de Markowitz como el de optimización del CVaR son enfoques "estáticos", que no permiten rebalancear el portafolio de forma de aprovechar los eventuales “ciclos” de los retornos. Sería interesante repetir el ejercicio planteado en este trabajo aplicando métodos de optimización dinámica que permita ir variando la composición óptima del portafolio.

Para usar este tipo de análisis con fines estratégicos de inversión hay que tener claro cuáles son los supuestos empleados para entender sus limitaciones. En primer lugar, el trabajo se basa en datos históricos que se suponen “equiprobables”. Es usual considerar que los retornos históricos son los mejores predictores de los retornos futuros. Sin embargo asignar la misma probabilidad a cada uno de los retornos históricos puede no ser un supuesto realista y podría sesgar los resultados. Una forma de corregir lo anterior sería modelar la distribución de retornos de alguna forma más sofisticada de manera que refleje mejor el comportamiento futuro esperado de los datos.

ANEXO 1

Justificación analítica del Análisis Media-Varianza

La función de utilidad individual puede ser expandida como una serie de Taylor en torno a la riqueza del final del período[12],

$$u(W) = u(E[W]) + u'(E[W])(W - E[W]) + \frac{1}{2}u''(E[W])(W - E[W])^2 + R_3$$

$$donde$$

$$R_3 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(E[W])(W - E[W])^n$$

donde $u^{(n)}$ denota la derivada n-ésima de u.

Asumiendo que la serie de Taylor converge y que las operaciones de esperanza y de suma son intercambiables, la esperanza de la utilidad individual puede ser expresada como

$$E[u(W)] = u(E[W]) + \frac{1}{2!}u''E([W])\sigma^2(W) + E[R_3]$$

$$donde$$

$$E[R_3] = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(E[W])m^n(W)$$

<u>(i) Para distribuciones arbitrarias, el modelo media-varianza puede estar motivado si se asume la utilidad como una función cuadrática.</u> Bajo utilidad cuadtrática, las derivadas superiores al tercer orden son cero y por lo tanto el término $E[R_3]$ = 0 para distribuciones arbitrarias y la utilidad esperada de un individuo está definida sobre los dos primeros momentos centrales de su riqueza al final del período, W,

$$E[u(W)] = E[W] - \frac{b}{2}E[W^2]$$

$$= E[W] - \frac{b}{2}\left((E[W])^2 + \sigma^2(W)\right)$$

Entonces, cuando las tasas de retorno esperado y las varianzas son finitas, la función de utilidad cuadrática es suficiente para que la selección de activos esté completamente descrita en términos de la media y la varianza de los retornos esperados.

<u>(ii) Para preferencias arbitrarias, el modelo media-varianza puede estar motivado si se asume que las tasas de retorno de los activos riesgosos se distribuyen normal multivariante.</u> La distribución normal está descrita completamente por su media y varianza. Bajo normalidad los momentos de orden tres y superiores involucrados en $E[R_3]$ pueden ser expresados en función de los dos primeros momentos y $E[R_3]$ queda en función de la media y la varianza únicamente. La distribución normal es además estable frente a la suma, es decir, la tasa de retorno de un portafolio compuesto de activos cuyos retornos se distribuyen normal multivariante es también normal.

[12] "Foundations for Financial Economics", N°. 6

Entonces, para funciones de utilidad que se definen sobre una riqueza a final del período que se distribuye en forma normal, el supuesto de que los retornos de los activos son normal multivariantes implica que la demanda de activos riesgosos se define sobre la base de la media y la varianza de los retornos del portafolio.

ANEXO 2

Metodología utilizada para elaborar los índices de "instrumentos locales"

La metodología general fue elaborar índices de retorno promedio mensual acumulado para cada literal, que agrupen todos los instrumentos que los componen, ponderados por su capitalización de mercado.

Series de precios

El punto de partida fue el conjunto de las series diarias de los precios de mercado de todos los instrumentos en que podían invertir las AFAP. Estas series fueron elaboradas en base a los precios de BEVSA, BVM, BCU y Bloomberg.
A partir de series diarias de precios de mercado se construyeron series de precios promedios mensuales.

Para los instrumentos que no cotizan por precio, se hizo lo mismo con las tasas de descuento o de interés.

Cálculo del Retorno Promedio Mensual de cada Instrumento

A partir de las series mensuales de precios se calculó la variación porcentual del precio de los instrumentos entre un mes y el siguiente (variación de capital).

Por otro lado, a partir de la tasa anual que paga el instrumento sobre el valor nominal, y del precio de mercado se calculó la ganancia por cupón mensual.

El rendimiento total mensual del instrumento es la suma de la variación mensual de capital y el rendimiento mensual por intereses.

Para los instrumentos que cotizan por tasa, el rendimiento mensual es la tasa anual de interés mensualizada.

En todos los casos los rendimientos están expresados en dólares nominales.

Ponderación

Para calcular el rendimiento mensual en dólares de cada literal, se hizo un promedio ponderado de los rendimientos de todos los instrumentos que lo componen. La ponderación se realizó por capitalización de mercado de los instrumentos, o sea, el producto del circulante en dólares y el precio promedio del mes.

En los casos en que no hay datos históricos de circulantes de los instrumentos que componen un literal, los índices se efectuaron estimando la participación de las AFAP en cada instrumento de ese literal.

En el caso de las disponibilidades transitorias, que agrupa colocaciones en dólares y en pesos uruguayos, la ponderación se realizó en función de la composición por moneda de las disponibilidades del conjunto de las AFAP.

Instrumentos Considerados

Literal A: instrumentos emitidos por el Estado uruguayo

Todas las series de Euronotas, Bonos Globales, Bonos Globales Registrados, Bonos de Ahorro Previsional, Bonos del Tesoro con tasa fija y variable y en todas las monedas que estuvieran vigentes en algún momento del periodo considerado..

Literal B: instrumentos emitidos por el Banco Hipotecario del Uruguay o por el Banco Central del Uruguay

Emitidos por el BHU: Certificados de Depósito, Plazos Fijos y Certificados de Depósito Amortizables en pesos o dólares, Certificados de Depósito ajustables por UA, y Bonos Hipotecarios en dólares y ajustables por IPC.

Emitidos por el BCU: Letras de Regulación Monetaria en pesos y dólares.

Literal C: depósitos a plazo en instituciones financieras

Certificados de depósito y Plazos Fijos en pesos, dólares y unidades indexadas.

Literal D: instrumentos emitidos por empresas

Eurobonos emitidos por bancos y Obligaciones Negociables emitidas por empresas.

Literal F: préstamos al consumo

Vales amortizables en pesos uruguayos y unidades indexadas.

Disponibilidades

Colocaciones a muy corto plazo en el Banco Central

ANEXO 3

Optimización de los portafolios de las AFAP

i) Portafolio Global Agregado

Tabla 1: Estadísticas descriptivas (Portafolio Global Agregado)

COEF. DE CORRELACIÓN	Sistema	JPMTUS	JPMTEURO	MSUS	MSEURO
Sistema	1.00	0.00	0.04	0.38	0.31
JPMTUS		1.00	0.57	-0.15	-0.07
JPMTEURO			1.00	-0.19	0.11
MSUS				1.00	0.77
MSEURO					1.00
retorno promedio	0.52%	0.63%	0.47%	0.58%	0.57%
desvío estándar	2.41%	1.19%	2.80%	4.11%	4.44%
VaR	5.50%	1.77%	3.67%	6.63%	6.94%
CVaR	6.99%	2.35%	4.00%	9.18%	9.90%
desv.est/retorno	4.7	1.9	5.9	7.1	7.8
CVaR/retorno	13.6	3.8	8.4	15.9	17.5

Tabla 2: Portafolios de Mínima Varianza (Portafolio Global Agregado)

	Retorno Esperado	0.52%	0.54%	0.56%	0.58%	0.60%	0.607%	0.612%	0.615%	0.618%	0.620%	0.621%	0.622%	0.624%	0.626%
sin restricción a la inversión extranjera	**CVaR**	2.44%				1.78%	1.85%	1.94%	2.00%	2.06%		2.12%	2.17%	2.23%	2.35%
	VaR	2.13%				1.38%	1.48%	1.47%	1.53%	1.57%		1.57%	1.63%	1.63%	1.77%
	Desvío Estándar	1.65%	1.41%	1.25%	1.12%	1.05%	1.028%	1.04%	1.05%	1.07%	1.07%	1.09%	1.10%	1.12%	1.19%
	Sistema	40.54%	34.13%	28.95%	23.54%	19.40%	14.17%	8.94%	6.21%	3.30%	1.33%	0.39%			
	JPMTUS	11.24%	29.55%	44.38%	59.86%	71.72%	79.26%	83.68%	85.97%	88.43%	89.98%	90.88%	93.49%	96.32%	100.00%
	JPMTEURO	41.25%	29.62%	20.20%	10.36%	2.83%									
	MSUS	6.97%	6.70%	6.47%	6.24%	6.06%	6.57%	7.37%	7.82%	8.28%	8.69%	8.73%	6.51%	3.68%	
	MSEURO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%									
restricción a la inversión extranjera: máximo 60%	**CVaR**	2.19%	2.04%	2.07%	2.23%	*PORTAFOLIOS NO FACTIBLES BAJO LAS RESTRICCIONES IMPUESTAS*									
	VaR	1.88%	1.79%	1.86%	1.94%										
	Desvío Estándar	1.65%	1.42%	1.28%	1.20%										
	Sistema	40.53%	40.00%	40.00%	40.00%										
	JPMTUS	11.25%	29.65%	44.42%	60.00%										
	JPMTEURO	41.25%	26.02%	13.54%											
	MSUS	6.97%	4.33%	2.04%											
	MSEURO														

PORTAFOLIOS INEFICIENTES

Tabla 3: Portafolios CVaR óptimos (Portafolio Global Agregado sin restricción a la inversión extranjera)

	Retorno Esperado	0.597%	0.599%	0.600%	0.602%	0.603%	0.605%	0.606%	0.608%	0.609%	0.611%	0.612%	0.614%	0.615%	0.617%
B = 90%	**CVaR**				1.278%	1.283%	1.289%	1.295%	1.301%	1.307%	1.317%	1.332%	1.358%	1.385%	1.412%
	VaR				0.742%	0.766%	0.777%	0.789%	0.800%	0.812%	0.803%	0.767%	0.787%	0.810%	0.834%
	Desvío Estándar				1.130%	1.117%	1.109%	1.101%	1.095%	1.090%	1.091%	1.099%	1.096%	1.094%	1.093%
	Sistema				14.02%	12.90%	11.69%	10.48%	9.27%	8.06%	6.75%	5.32%	4.15%	3.00%	1.85%
	JPMTUS				68.87%	70.39%	71.87%	73.34%	74.82%	76.29%	77.54%	78.47%	80.05%	81.66%	83.27%
	JPMTEURO														
	MSUS				12.45%	12.89%	12.94%	13.00%	13.05%	13.10%	13.98%	15.95%	15.65%	15.22%	14.79%
	MSEURO				4.66%	3.82%	3.50%	3.18%	2.87%	2.55%	1.73%	0.26%	0.15%	0.12%	0.10%
B = 95%	**CVaR**	1.622%	1.631%	1.641%	1.652%	1.665%	1.678%	1.691%	1.704%	1.717%	1.730%	1.743%	1.759%	1.801%	1.851%
	VaR	1.249%	1.268%	1.289%	1.304%	1.308%	1.311%	1.315%	1.318%	1.322%	1.325%	1.329%	1.269%	1.198%	1.099%
	Desvío Estándar	1.097%	1.073%	1.059%	1.057%	1.066%	1.081%	1.100%	1.124%	1.153%	1.185%	1.221%	1.243%	1.200%	1.148%
	Sistema	20.63%	19.72%	18.76%	17.47%	15.29%	13.12%	10.94%	8.77%	6.59%	4.42%	2.24%	0.44%		
	JPMTUS	69.44%	70.45%	71.51%	72.36%	72.66%	72.95%	73.25%	73.55%	73.85%	74.14%	74.44%	75.21%	77.76%	80.86%
	JPMTEURO														
	MSUS		3.44%	7.05%	10.17%	12.05%	13.93%	15.81%	17.69%	19.56%	21.44%	23.32%	24.35%	22.24%	19.14%
	MSEURO	9.93%	6.40%	2.68%											
B = 99%	**CVaR**						1.832%	1.833%	1.860%	1.900%	1.941%	1.981%	2.022%	2.130%	2.238%
	VaR						1.832%	1.833%	1.860%	1.900%	1.941%	1.981%	2.022%	2.130%	2.238%
	Desvío Estándar						1.223%	1.220%	1.237%	1.242%	1.248%	1.255%	1.263%	1.200%	1.148%
	Sistema						8.07%	7.93%	6.18%	4.64%	3.10%	1.56%	0.02%		
	JPMTUS						68.30%	69.44%	70.20%	71.32%	72.44%	73.56%	74.68%	77.76%	80.86%
	JPMTEURO						0.92%	0.04%							
	MSUS						22.71%	22.59%	23.62%	24.04%	24.46%	24.88%	25.30%	22.24%	19.14%
	MSEURO														

Gráfico 1: Composición de los portafolios CVaR óptimos (β=90%)

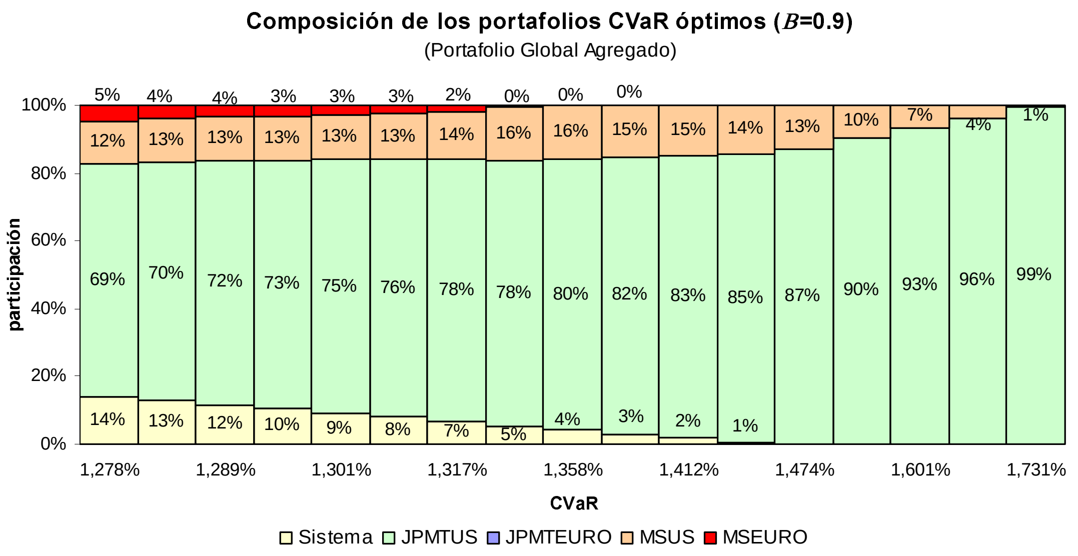


Gráfico 2: Frontera Eficiente en media-CVaR (β= 90%)

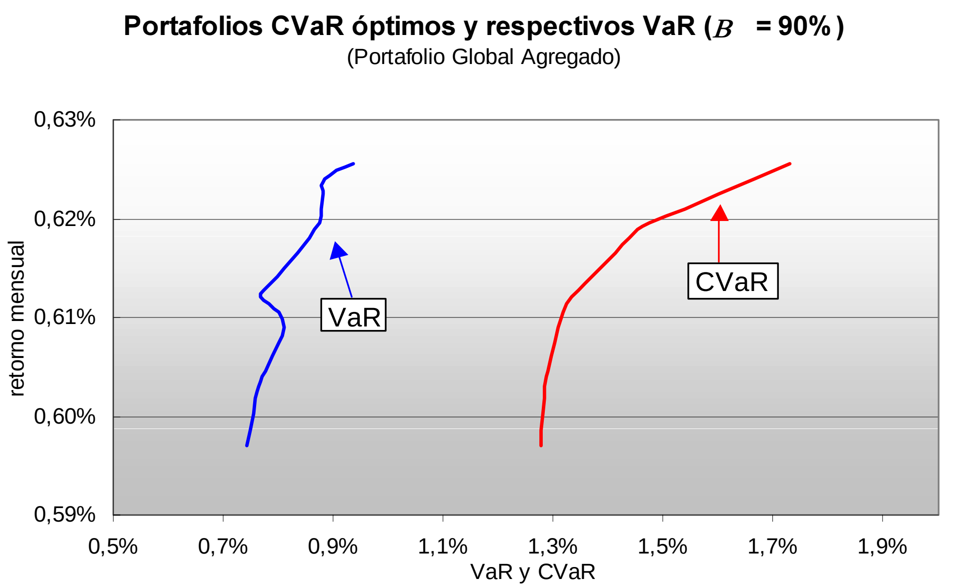


Gráfico 3: Composición de los portafolios CVaR óptimos (β=99%)

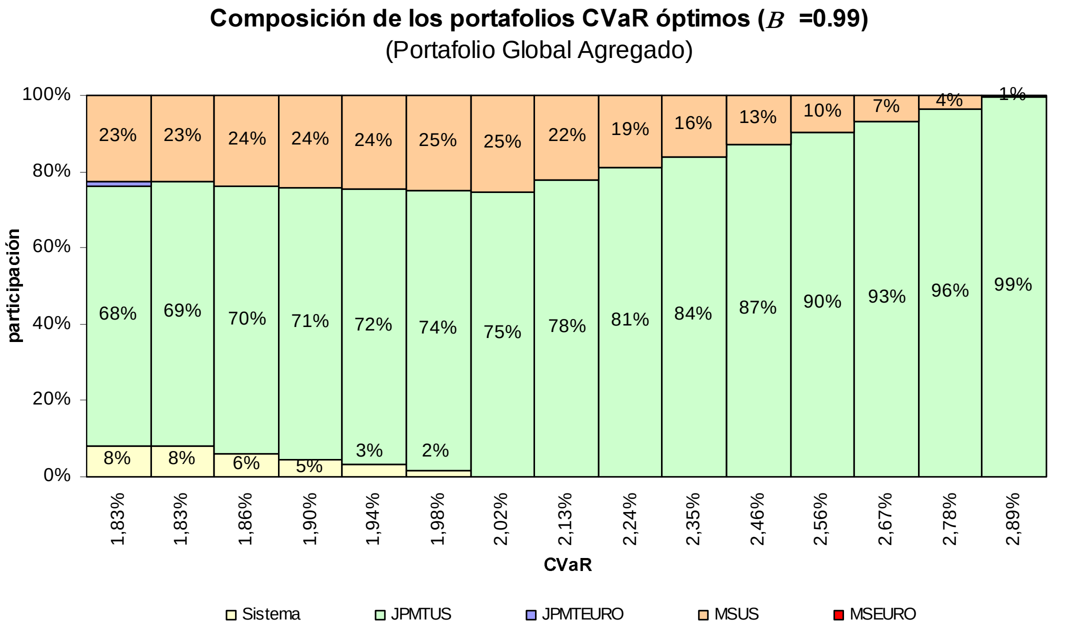
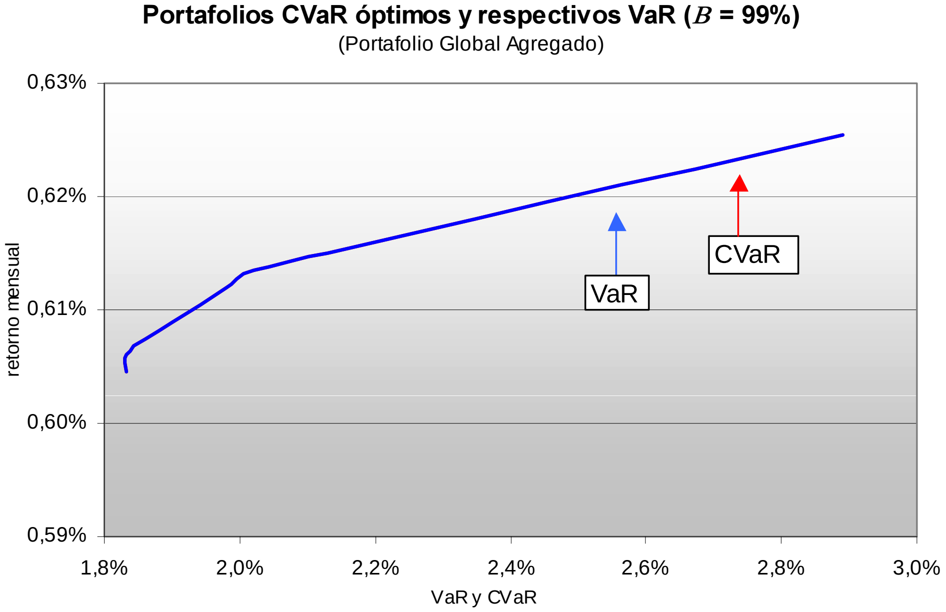
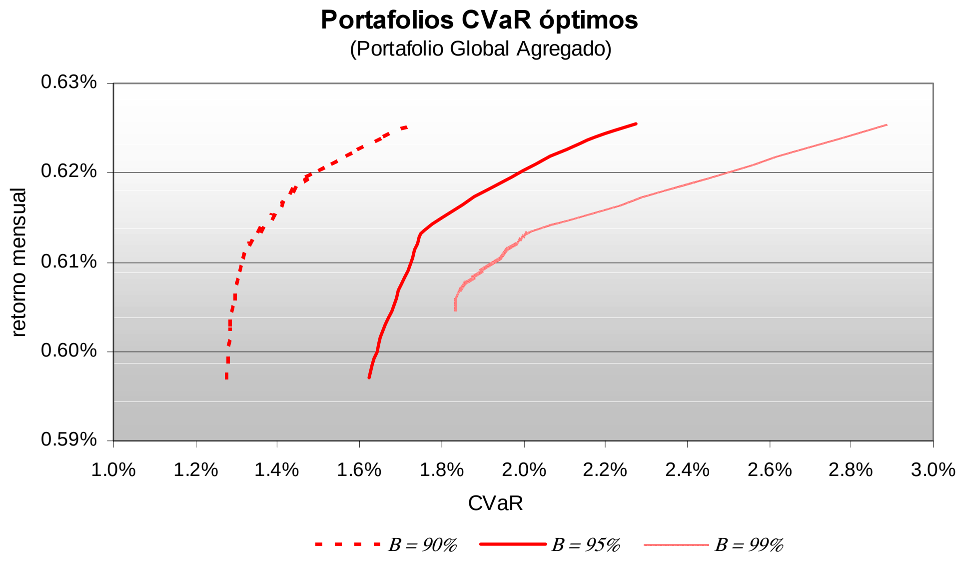


Gráfico 4: Frontera Eficiente en media-CVaR (β= 90%)



Para un nivel de confianza de 99%, los datos no permiten distinguir el VaR del CVaR.

Gráfico 5: Comparación de las Fronteras Eficientes en media-CVaR para distintos niveles de confianza



ii) Portafolio Local Desagregado

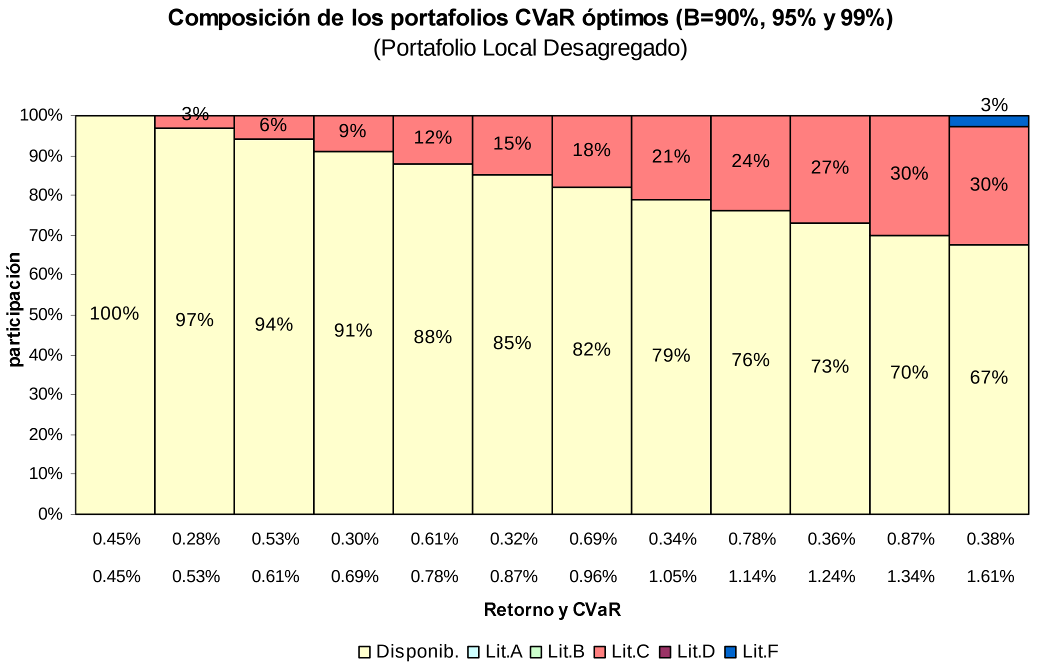
Tabla 4: Estadísticas descriptivas (Portafolio Local Desagregado)

COEF. DE CORRELACION	Disponibilidad	Lit.A	Lit.B	Lit.C	Lit.D	Lit.F
Disponibilidad	1.00	0.40	0.29	0.49	0.60	0.49
Lit.A		1.00	0.48	0.61	0.56	0.56
Lit.B			1.00	0.41	0.49	0.37
Lit.C				1.00	0.48	0.82
Lit.D					1.00	0.50
Lit.F						1.00
retorno promedio	0.28%	0.07%	0.28%	0.95%	-0.21%	1.06%
desvío estándar	0.25%	4.13%	5.35%	2.08%	3.54%	3.84%
VaR	0.97%	0.97%	1.01%	1.08%	1.20%	1.24%
CVaR	1.16%	1.19%	1.22%	1.27%	1.43%	1.48%
desv.est. / retorno	0.9	57.6	18.8	2.2		3.6
CVaR / retorno	4.1	16.7	4.3	1.3		1.4

Tabla 5: Portafolios de Mínima Varianza y CVaR óptimos (Portafolio Local Desagregado)

MARKOWITZ y CVAR ÓPTIMOS													
	Retorno Esperado	0.28%	0.30%	0.32%	0.34%	0.36%	0.38%	0.40%	0.42%	0.44%	0.46%	0.48%	0.50%
	Desvío Estándar	0.25%	0.28%	0.32%	0.36%	0.41%	0.46%	0.51%	0.56%	0.62%	0.67%	0.73%	0.81%
	Disponib.	100.00%	96.96%	93.97%	90.97%	87.98%	84.99%	81.99%	79.00%	76.00%	73.01%	70.01%	67.44%
	Literal A												
	Literal B												
	Literal C		3.04%	6.03%	9.03%	12.02%	15.02%	18.01%	21.00%	24.00%	26.99%	29.99%	30.00%
	Literal D												
	Literal F												2.56%
B = 90%	**CVaR**	0.245%	0.291%	0.338%	0.389%	0.445%	0.502%	0.562%	0.622%	0.683%	0.743%	0.804%	0.950%
	VaR	-0.040%	-0.018%	-0.020%	0.025%	0.020%	0.007%	0.027%	0.057%	0.087%	0.118%	0.145%	0.160%
B = 95%	**CVaR**	0.449%	0.530%	0.610%	0.693%	0.778%	0.865%	0.955%	1.045%	1.140%	1.238%	1.337%	1.613%
	VaR	0.131%	0.153%	0.174%	0.182%	0.177%	0.187%	0.233%	0.278%	0.307%	0.364%	0.415%	0.450%
B = 99%	**CVaR**	0.963%	1.030%	1.096%	1.161%	1.227%	1.293%	1.428%	1.622%	1.815%	2.008%	2.202%	2.676%
	VaR	0.963%	1.030%	1.096%	1.161%	1.227%	1.293%	1.428%	1.622%	1.815%	2.008%	2.202%	2.676%

Gráfico 6: Composición de los portafolios CVaR óptimos (β=90%, 95% y 99%)



Para los tres niveles de confianza analizados, los portafolios óptimos coinciden.

Gráfico 7: Frontera Eficiente en media-CVaR (β = 90%)

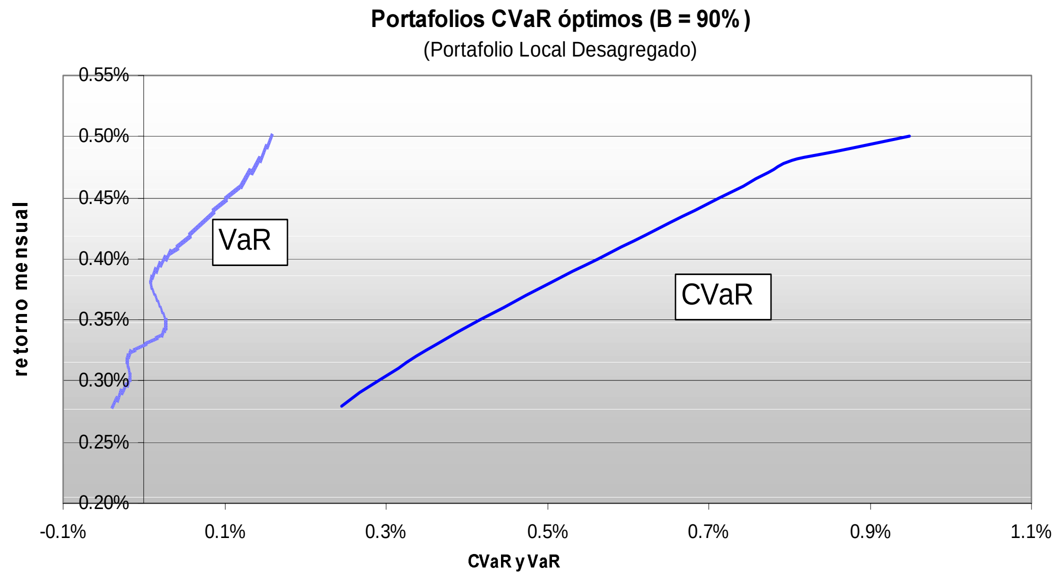


Gráfico 8: Frontera Eficiente en media-CVaR (B = 99%)

Para un nivel de confianza de 99%, los datos no permiten distinguir el VaR del CVaR.

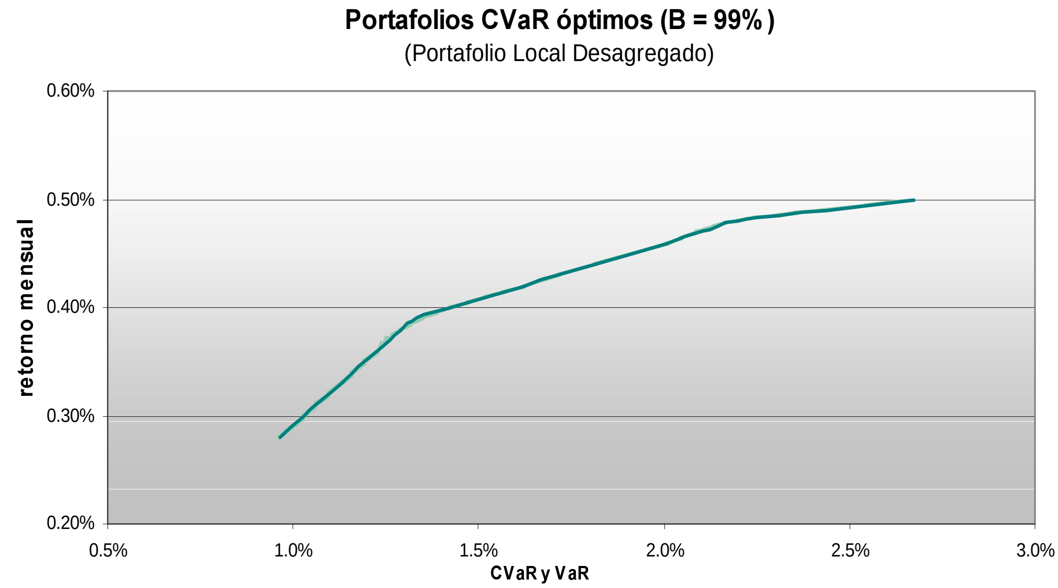
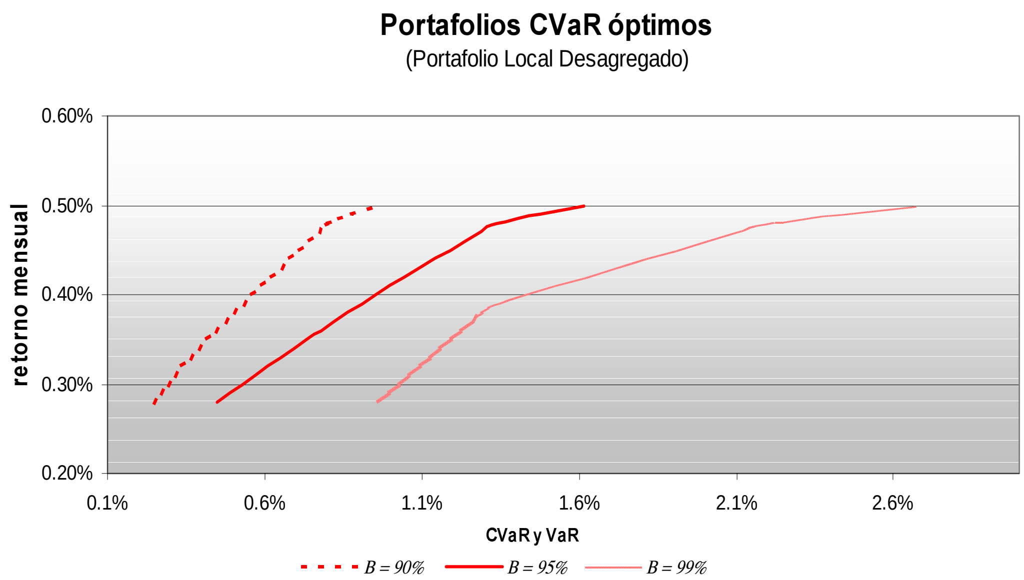


Gráfico 9: Comparación Fronteras Eficientes en media-CVaR para distintos niveles de confianza (Portafolio Local Desagregado)



iii) Portafolio Global Desagregado

Tabla 6: Estadísticas descriptivas (Portafolio Global Desagregado)

COEF. DE CORRELACION	Disponibilidad	Lit.A	Lit.B	Lit.C	Lit.D	Lit.F	JPMTUS	MSUS	JPMTEURO	MSEURO
Disponibilidad	1.00	0.40	0.29	0.49	0.60	0.49	0.01	0.24	-0.11	0.13
Lit.A		1.00	0.48	0.61	0.56	0.56	0.00	0.45	0.03	0.37
Lit.B			1.00	0.41	0.49	0.37	-0.04	0.16	0.02	0.12
Lit.C				1.00	0.48	0.82	-0.04	0.38	0.05	0.36
Lit.D					1.00	0.50	-0.16	0.38	-0.14	0.25
Lit.F						1.00	-0.19	0.34	-0.11	0.32
JPMTUS							1.00	-0.25	0.61	-0.14
MSUS								1.00	-0.21	0.81
JPMTEURO									1.00	0.11
MSEURO										1.00
retorno promedio	0.28%	0.07%	0.28%	0.95%	-0.21%	1.06%	0.58%	-0.01%	0.58%	-0.12%
desvío están.	0.25%	4.13%	5.35%	2.08%	3.54%	3.84%	1.28%	4.27%	3.04%	4.49%
VaR	0.97%	0.97%	1.01%	1.08%	1.20%	1.24%	1.31%	1.40%	1.43%	1.40%
CVaR	1.16%	1.19%	1.22%	1.27%	1.43%	1.48%	1.51%	1.53%	1.55%	1.57%
desv.est. / retorno	0.9	57.6	18.8	2.2		3.6	2.2		5.2	
CVaR / retorno	4.1	16.7	4.3	1.3		1.4	2.6		2.7	

Tabla 7: Portafolios de mínima varianza (Portafolio Global Desagregado)

	Retorno Esperado	0.24%	0.27%	0.29%	0.32%	0.36%	0.40%	0.44%	0.48%	0.52%	0.56%	0.60%	0.65%	0.66%	0.68%	0.69%	0.70%
MARKOWITZ (sin tope a inversión extranjera)	**CVaR**	1.113%	0.557%	0.44%	0.48%	0.55%	0.63%	0.72%	0.80%	0.92%	1.06%	1.19%	1.43%	1.48%	1.53%	1.55%	1.57%
	VaR	0.513%	0.205%	0.15%	0.21%	0.33%	0.51%	0.66%	0.75%	0.85%	0.92%	0.97%	1.20%	1.24%	1.40%	1.43%	1.40%
	Desvío Estándar	0.43%	0.28%	0.25%	0.27%	0.33%	0.40%	0.48%	0.57%	0.65%	0.74%	0.83%	0.95%	0.97%	1.02%	1.05%	1.08%
	Disponibilidad	91.25%	97.68%	96.9%	88.5%	80.0%	71.6%	63.1%	54.7%	46.2%	37.8%	29.3%	16.5%	14.1%	7.4%	4.0%	0.6%
	Literal A																
	Literal B																
	Literal C				1.7%	5.7%	9.7%	13.7%	17.8%	21.8%	25.8%	29.8%	30.0%	30.0%	30.0%	30.0%	30.0%
	Literal D	5.16%	0.41%														
	Literal F												2.4%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%
	JPMTUS			2.0%	9.8%	14.3%	18.7%	23.1%	27.6%	32.0%	36.4%	40.9%	51.1%	53.0%	59.6%	63.0%	66.4%
	MSUS																
	JPMTEURO			1.0%	0.0%												
	MSEURO	3.60%	1.91%														
MARKOWITZ (tope a inversión extranjera = 60%)	**CVaR**	1.113%	0.557%	0.44%	0.48%	0.55%	0.63%	0.72%	0.80%	0.92%	1.06%	1.19%	1.43%	1.48%	1.53%	***PORTAFOLIOS NO FACTIBLES BAJO LAS RESTRICCIONES IMPUESTAS***	
	VaR	0.513%	0.205%	0.15%	0.21%	0.33%	0.51%	0.66%	0.75%	0.85%	0.92%	0.97%	1.20%	1.24%	1.40%		
	Desvío Estándar	0.43%	0.28%	0.25%	0.27%	0.33%	0.40%	0.48%	0.57%	0.65%	0.74%	0.83%	0.95%	0.97%	1.02%		
	Disponibilidad	91.25%	97.68%	96.9%	88.5%	80.0%	71.6%	63.1%	54.7%	46.2%	37.8%	29.3%	16.5%	14.1%	7.4%		
	Literal A																
	Literal B																
	Literal C				1.7%	5.7%	9.7%	13.7%	17.8%	21.8%	25.8%	29.8%	30.0%	30.0%	30.0%		
	Literal D	5.16%	0.41%														
	Literal F												2.4%	3.0%	3.0%		
	JPMTUS			2.0%	9.8%	14.3%	18.7%	23.1%	27.6%	32.0%	36.4%	40.9%	51.1%	53.0%	59.6%		
	MSUS																
	JPMTEURO			1.0%	0.0%												
	MSEURO	3.60%	1.91%														

PORTAFOLIOS INEFICIENTES

Tabla 8: Portafolios CVaR óptimos (Portafolio Global Desagregado)

	Retorno Esperado	0.29%	0.32%	0.36%	0.40%	0.44%	0.48%	0.50%	0.52%	0.54%	0.56%	0.58%	0.60%	0.62%
B = 90%	**CVaR**	0.242%	0.275%	0.341%	0.410%	0.483%	0.560%	0.599%	0.639%	0.678%	0.722%	0.780%	0.840%	0.902%
	VaR	0.040%	0.065%	0.118%	0.240%	0.355%	0.398%	0.373%	0.338%	0.303%	0.330%	0.584%	0.715%	0.617%
	Desvío Estándar	0.25%	0.28%	0.36%	0.48%	0.62%	0.71%	0.74%	0.76%	0.79%	0.83%	0.94%	1.00%	0.95%
	Disponibilidad	96.6%	88.1%	79.5%	72.2%	64.7%	57.7%	54.3%	50.8%	47.4%	43.2%	36.5%	29.8%	22.9%
	Literal A													
	Literal B													
	Literal C	0.0%	1.3%	5.2%	10.1%	14.8%	20.0%	22.6%	25.3%	27.9%	30.0%	30.0%	30.0%	30.0%
	Literal D													
	Literal F													
	JPMTUS	1.3%	8.5%	10.2%	8.6%	7.4%	8.2%	10.1%	12.4%	14.7%	16.9%	17.2%	22.6%	37.6%
	JPMTEURO	2.1%	2.1%	5.0%	9.1%	13.1%	14.1%	13.0%	11.5%	10.0%	9.9%	16.3%	17.6%	9.5%
	MSUS													
	MSEURO													
B = 95%	**CVaR**	0.403%	0.438%	0.493%	0.548%	0.602%	0.662%	0.695%	0.730%	0.767%	0.804%	0.842%	0.901%	0.981%
	VaR	0.115%	0.165%	0.241%	0.317%	0.393%	0.483%	0.537%	0.596%	0.658%	0.719%	0.784%	0.882%	0.948%
	Desvío Estándar	0.25%	0.29%	0.39%	0.50%	0.63%	0.73%	0.77%	0.82%	0.87%	0.92%	0.97%	1.04%	1.15%
	Disponibilidad	95.2%	89.9%	81.7%	73.5%	65.4%	56.8%	52.2%	47.8%	43.6%	39.3%	35.0%	29.3%	23.4%
	Literal A													
	Literal B											0.1%	1.0%	1.8%
	Literal C		2.7%	6.9%	11.1%	15.3%	19.2%	21.0%	22.8%	24.8%	26.8%	28.8%	30.0%	30.0%
	Literal D													
	Literal F												0.2%	1.2%
	JPMTUS	3.2%	3.6%	4.3%	4.9%	5.6%	8.4%	11.3%	13.4%	15.0%	16.5%	18.1%	20.5%	21.3%
	JPMTEURO	1.6%	3.7%	7.1%	10.4%	13.7%	15.6%	15.6%	16.0%	16.6%	17.3%	18.0%	19.1%	22.3%
	MSUS													
	MSEURO													
B = 99%	**CVaR**	0.553%	0.554%	0.587%	0.625%	0.673%	0.733%	0.763%	0.792%	0.822%	0.852%	0.881%	0.911%	0.984%
	VaR	0.553%	0.554%	0.587%	0.625%	0.673%	0.733%	0.763%	0.792%	0.822%	0.852%	0.881%	0.911%	0.984%
	Desvío Estándar	0.44%	0.34%	0.45%	0.61%	0.76%	0.84%	0.89%	0.93%	0.98%	1.02%	1.04%	1.05%	1.10%
	Disponibilidad	76.5%	78.4%	67.8%	59.9%	53.6%	48.7%	46.3%	43.9%	41.5%	39.0%	34.1%	27.2%	23.5%
	Literal A													
	Literal B											0.5%	1.4%	1.5%
	Literal C			5.5%	11.0%	16.0%	20.4%	22.6%	24.7%	26.9%	29.1%	30.0%	30.0%	30.0%
	Literal D													
	Literal F													1.1%
	JPMTUS	15.8%	18.2%	21.6%	15.9%	11.2%	10.2%	9.8%	9.3%	8.8%	8.4%	13.4%	22.6%	24.2%
	JPMTEURO				7.5%	13.9%	16.6%	18.0%	19.4%	20.8%	22.2%	21.1%	18.3%	19.7%
	MSUS													
	MSEURO	7.7%	3.4%	5.1%	5.7%	5.3%	4.0%	3.3%	2.7%	2.0%	1.3%	0.9%	0.5%	

Grafico 10: Composición de los portafolios CVaR óptimos (B = 90%)

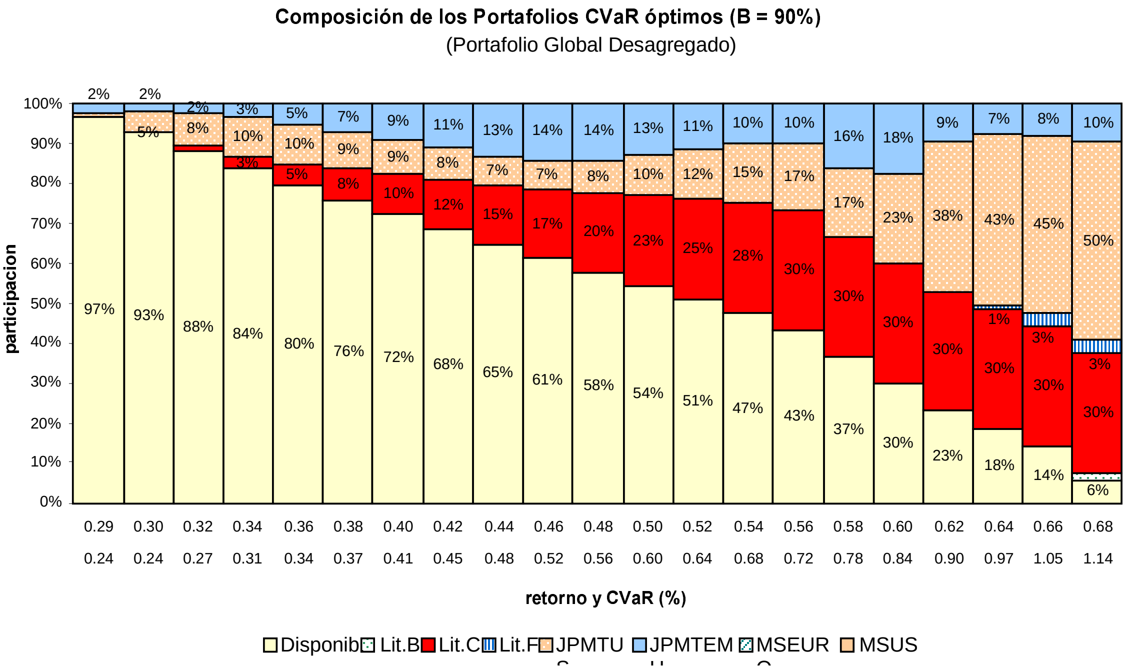


Grafico 11: Frontera Eficiente en media CVaR (B = 90%)

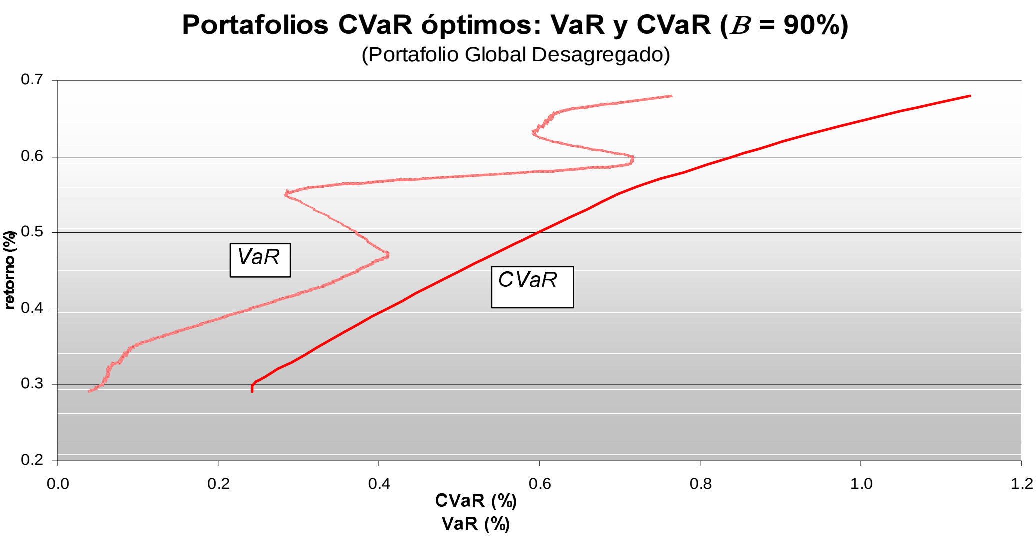


Grafico 12: Composición de los portafolios CVaR óptimos (B = 99%)

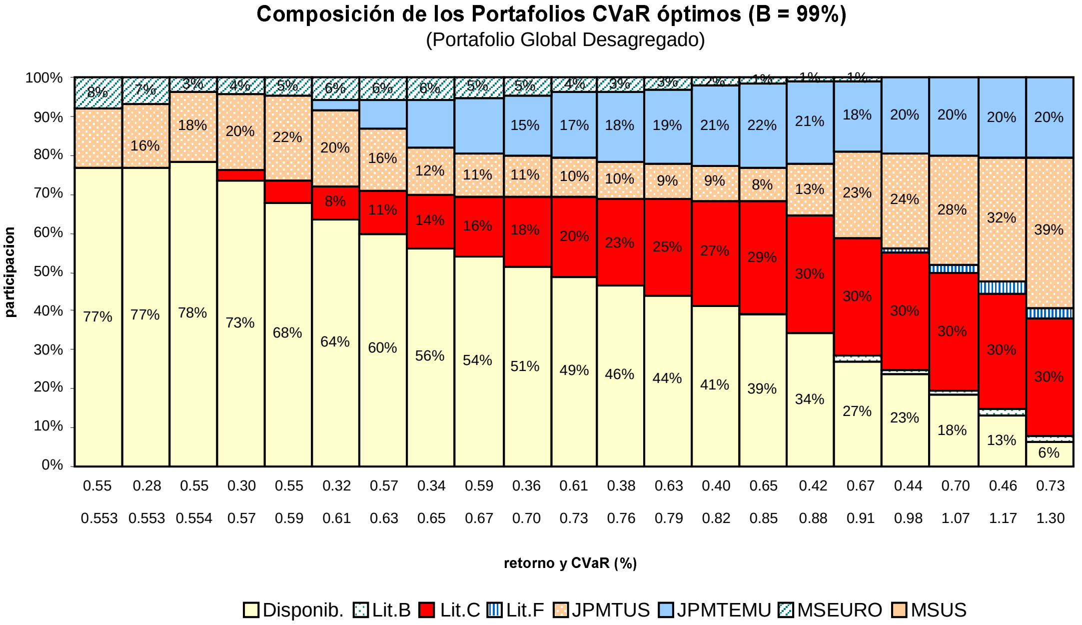


Grafico 13: Frontera Eficiente en media CVaR (B = 99%)

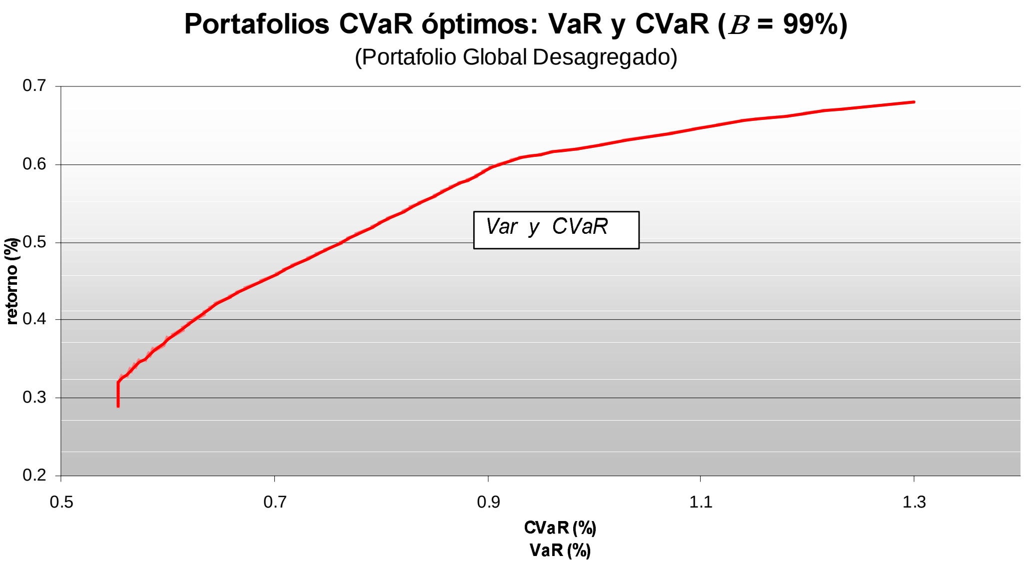


Grafico 14: Comparación de las Fronteras Eficientes para distintos niveles de confianza (Portafolio Global Desagregado)

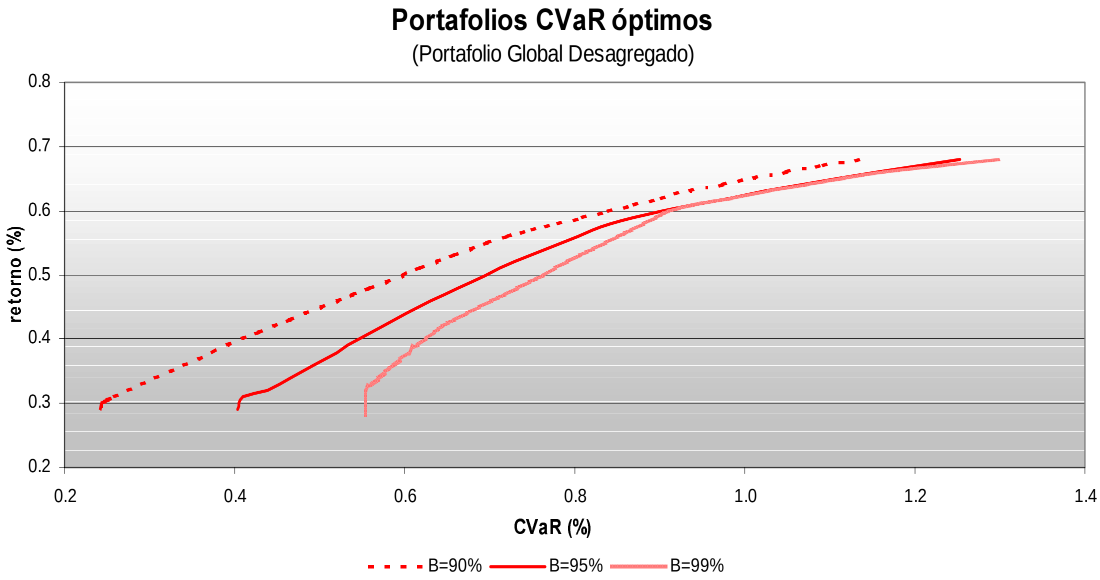


Tabla 9: Estadísticas descriptivas (Portafolio Global Desagregado – Literal C corregido)

COEF. DE CORRELACIÓN	Disponibilidad	Lit.A	Lit.B	Lit.C "corregido"	Lit.D	Lit.F	JPMTUS	MSUS	JPMTEURO	MSEURO
Disponibilidad	1.00	0.40	0.29	0.23	0.60	0.49	0.01	0.24	-0.11	0.13
Lit.A		1.00	0.48	0.33	0.56	0.56	0.00	0.45	0.03	0.37
Lit.B			1.00	0.33	0.49	0.37	-0.04	0.16	0.02	0.12
Lit.C				1.00	0.30	0.25	-0.11	0.25	-0.02	0.24
Lit.D					1.00	0.50	-0.16	0.38	-0.14	0.25
Lit.F						1.00	-0.19	0.34	-0.11	0.32
retorno promedio	0.28%	0.07%	0.28%	0.71%	-0.21%	1.06%	0.576%	-0.01%	0.581%	-0.12%
desvio estandar	0.25%	4.13%	5.35%	2.61%	3.54%	3.84%	1.28%	4.27%	3.04%	4.49%
desv.est. / retorno	0.9	57.6	18.8	3.7		3.6	2.2		5.2	

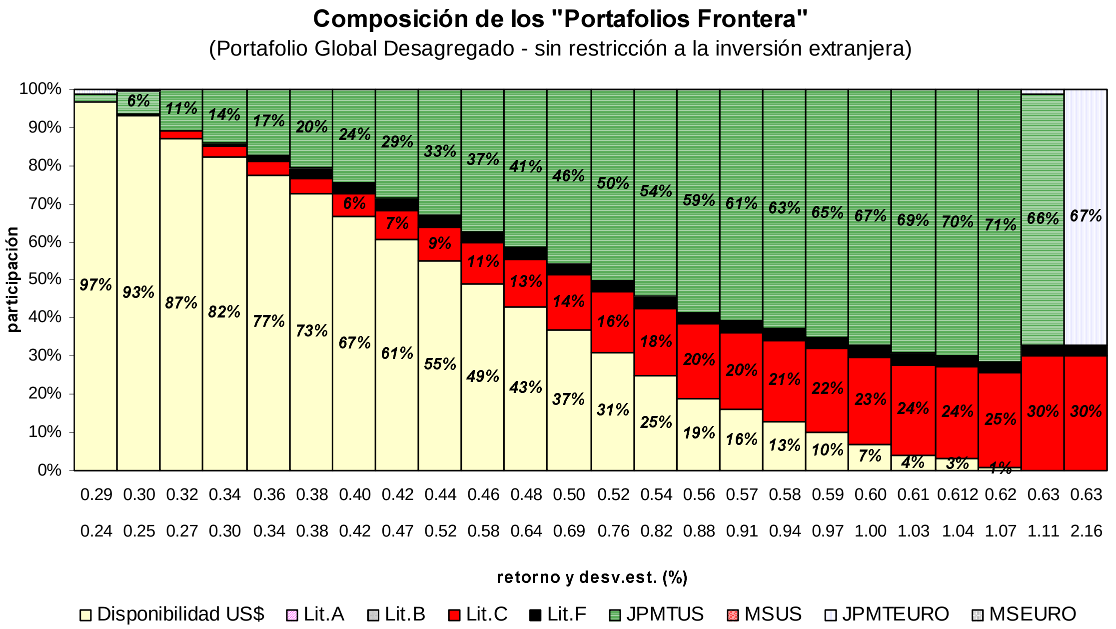
iv) Portafolio Global Desagregado

Tabla 10: Portafolios de mínima varianza (Portafolio Global Desagregado – Literal C corregido)

	Retorno Esperado	0.24%	0.27%	0.29%	0.32%	0.36%	0.40%	0.44%	0.48%	0.52%	0.56%	0.60%	0.61%	0.61%	0.62%	0.63%	0.63%
MARKOWITZ (sin tope a inversión extranjera)	**CVaR**																
	VaR																
	Desvío Estándar	0.43%	0.28%	0.25%	0.27%	0.34%	0.42%	0.52%	0.64%	0.76%	0.88%	1.00%	1.03%	1.04%	1.07%	1.11%	2.16%
	Disponibilidad	91.25%	97.68%	96.9%	87.3%	77.5%	66.8%	54.8%	42.9%	30.9%	18.9%	7.0%	4.0%	3.3%	1.0%		
	Literal A																
	Literal B																
	Literal C				1.9%	3.5%	5.8%	9.2%	12.6%	16.1%	19.5%	22.9%	23.8%	24.0%	24.7%	30.0%	30.0%
	Literal D	5.16%	0.41%														
	Literal F					1.9%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%
	JPMTUS			2.0%	10.8%	17.2%	24.4%	33.0%	41.5%	50.0%	58.6%	67.1%	69.2%	69.7%	71.4%	65.9%	
	MSUS																
	JPMTEURO			1.0%												1.1%	67.0%
	MSEURO	3.60%	1.91%														
MARKOWITZ (tope a Inversión extranjera = 60%)	**CVaR**														***PORTAFOLIOS NO FACTIBLES BAJO LAS RESTRICCIONES IMPUESTAS***		
	VaR																
	Desvío Estándar	0.43%	0.28%	0.25%	0.27%	0.34%	0.42%	0.52%	0.64%	0.76%	0.88%	1.02%	1.23%	2.07%			
	Disponibilidad	91.25%	97.68%	96.9%	87.3%	77.5%	66.8%	54.8%	42.9%	30.9%	18.9%	9.2%	6.5%				
	Literal A																
	Literal B												0.5%	7.0%			
	Literal C				1.9%	3.5%	5.8%	9.2%	12.6%	16.1%	19.5%	27.8%	30.0%	30.0%			
	Literal D	5.16%	0.41%														
	Literal F					1.9%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%	3.0%			
	JPMTUS			2.0%	10.8%	17.2%	24.4%	33.0%	41.5%	50.0%	58.6%	60.0%	41.5%				
	MSUS																
	JPMTEURO			1.0%									18.5%	60.0%			
	MSEURO	3.60%	1.91%														

PORTAFOLIOS INEFICIENTES

Grafico 15: Portafolios de mínima varianza (Portafolio Global Desagregado-Literal C corregido)



La sustitución de la serie de Literal C por la de Literal C “corregido”, donde se valúan “a mercado” los depósitos en instituciones bancarias intervenidas introduce mas volatilidad a los portafolios. Por otro lado, los retornos factibles alcanzan su máximo en 0,63% mensual inferior al máximo de 0,70% del caso “original”.

En la versión con Literal C “original”, los aumentos de retorno se logran con aumentos de la inversión en el exterior y Literal C simultáneamente. Solamente después de alcanzado el tope legal de 30% de Literal C es que se incorpora el Literal F hasta que este alcanza el máximo de 3% impuesta por restricciones de oferta.

Con el Literal C “corregido”, su participación en los portafolios óptimos se reduce en relación a la versión original y da lugar al Literal F antes de que se alcance el tope de 30% al Literal C a diferencia de lo que ocurría en el caso “original”.

Grafico 16: Portafolios de mínima varianza (Portafolio Global Desagregado-Literal C corregido) con restricción del 60% a la inversión extranjera

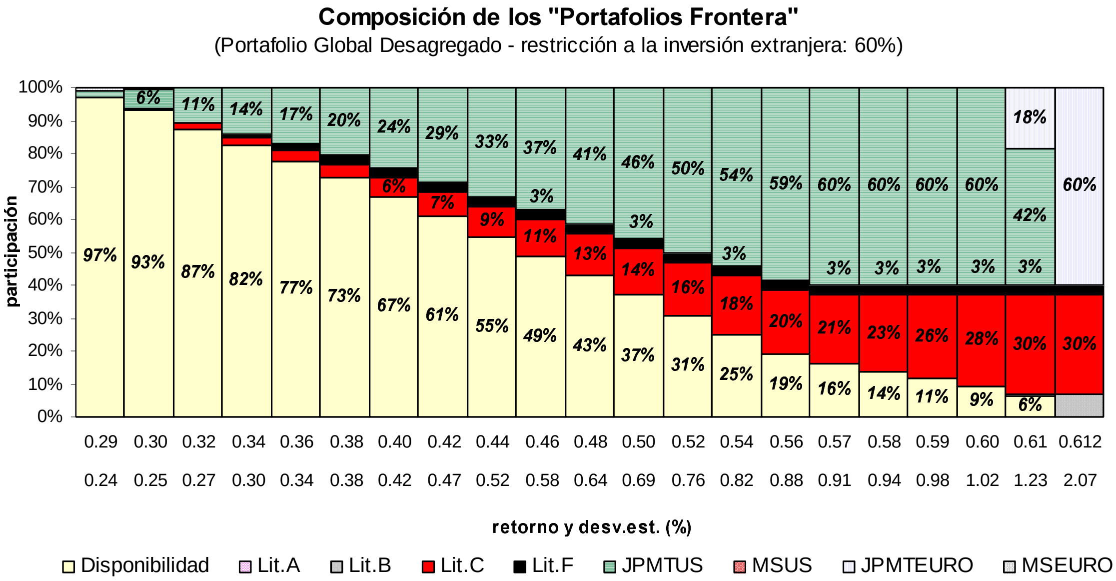
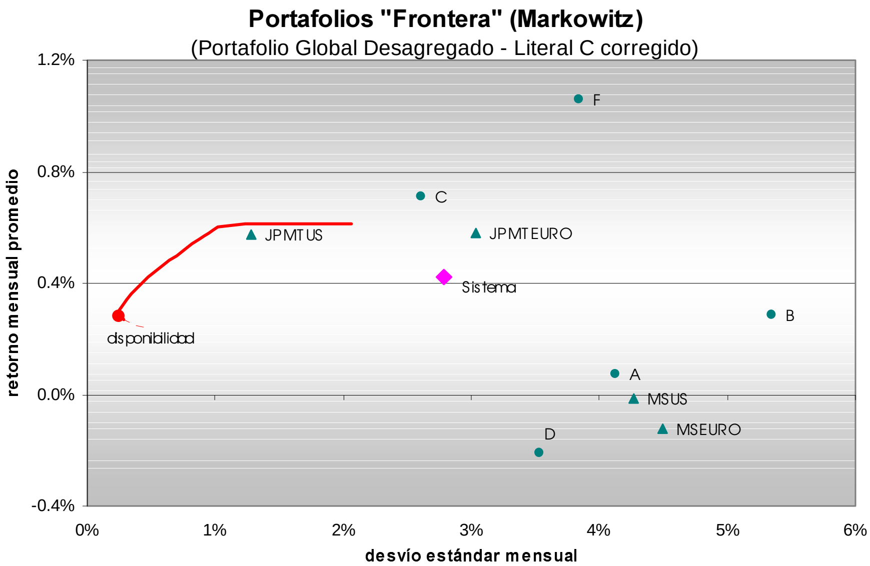


Grafico 17: Frontera Eficiente en media-varianza (Portafolio Global Desagregado-Literal C corregido)



BIBLIOGRAFÍA

Artzner, P, Delbaen, F, Eber, J.M. y Heath, D. (1999) -. " Coherent Mearures of Risk". Mathematical Finance, 9.

Elder, John y Kennedy, Peter E. (2001) – "Testing for unit roots: what should students be taught?", Journal of economic education.

Grinstead, Charles M. y Snell, J. Laurie. (2000) – "Introduction to Probability" .

Krokhmal, Pavlo, Palmquist, Jonas y Uryasev, Stanislav. (2001) – "Portfolio Optimization with conditional value-at-risk objective and constraints".

Markowitz, H.M. (1952) - "Portfolio Selection". Journal of Finance. Vol.7,1.

Rockafellar, R. Tyrrell y Uryasev, Stanislav. (1999) – "Optimization of Conditional Value-at-Risk".

Siandra, Eduardo y Testuri, Carlos. (2001) – "Foreign Equity Investment in Uruguayan Pension Funds".

Uryasev, Stanislav. (2000) – "Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications", Financial Engineering News.

Fecha de impresión: 30 de junio de 2004